.

И. В. Бойков

ОПТИМАЛЬНЫЕ МЕТОДЫ ПРИБЛИЖЕНИЯ ФУНКЦИЙ И ВЫЧИСЛЕНИЯ ИНТЕГРАЛОВ

Издательство
Пензенского государственного
университета

Пенза 2007

ОГЛАВЛЕНИЕ

.
ПРЕДИСЛОВИЕ. 6

Глава 1
ВВЕДЕНИЕ. 9
1. Постановка задачи оптимизации. 9
2. Классы функций. 10
3. Элементы теории приближений 16
3.1. Некоторые обозначения. 17
3.2. Полиномы наилучшего приближения. 17
3.3. Интерполяционные полиномы. 21
3.4. Элементы теории сплайнов. 24
3.5. Некоторые факты из теории квадратурных формул. 28
4. Элементы функционального анализа. 39

Глава 2
ОПТИМАЛЬНЫЕ МЕТОДЫ ВОССТАНОВЛЕНИЯ ФУНКЦИЙ
СО СТЕПЕННЫМ РОСТОМ ПРОИЗВОДНЫХ У ГРАНИЦЫ ОБЛАСТИ. 40
1. Определение поперечников и их основные свойства. 40
2. Поперечники на классе $Q_{r,\gamma,p}([-1,1],M)$ функций одной переменной.. 49
3. Поперечники на классе $Q_{r,\gamma,p}([-1,1]^l,M)$ функций многих переменных.. 69
4. Аппроксимация сплайнами на классе $B_{r,\gamma}(\Omega,M)$ функций одной переменной. 96
5. Поперечники класса $B_{r,\gamma}(\Omega,M)$ функций многих переменных. 99
Глава 3
ЭНТРОПИЯ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ МНОЖЕСТВ. 105
1. Определения и предварительные сведения. 105
2. Энтропия класса функции $F^{\Omega}_{p,\omega,c}$.. 109
3. Энтропия класса функций $Q_{r,\gamma}([-1,1],M)$ 121
4. Энтропия класса функций $Q_{r,\gamma,p}([-1,1]^l,M)$ 130

Глава 4
ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ СУПЕРПОЗИЦИЯМИ ФУНКЦИЙ МЕНЬШЕГО ЧИСЛА ПЕРЕМЕННЫХ. . . . 137
1. Введение. . . . 137
2. Существование аналитических функций многих комплексных переменных, не представимых в виде суперпозиций непрерывно дифференцируемых функций меньшего числа комплексных переменных. . . . 141
3. Существование аналитических функций двух вещественных переменных, не представимых в виде суперпозиций непрерывно дифференцируемых функций одной вещественной переменной и операции сложения. . . . 150

Глава 5
АДАПТИВНЫЕ МЕТОДЫ ВОССТАНОВЛЕНИЯ ФУНКЦИЙ. 152
1. Адаптивные алгоритмы восстановления функций на классе $W_p^r(1)$. . . . 152
2. Адаптивные алгоритмы восстановления функций на классе $Q_{r,\gamma,p}([-1,1],M)$. . . . 155
3. Адаптивные алгоритмы восстановления на классе функций Соболева. . . . 159
4. Адаптивные алгоритмы восстановления функций на классе $Q_{r,\gamma,p}([-1,1]^l,M), l \geq 2$. . . . 163

Глава 6
КВАДРАТУРНЫЕ ФОРМУЛЫ. . . . 170
1 . Интегралы со степенными особенностями. . . . 170
2. Асимптотически оптимальные квадратурные формулы на классах функций со степенным ростом производных у границы области. . . . 176
3. Адаптивные алгоритмы на классе $Q_{r,\gamma,p}(\Omega,M), \Omega=[-1,1]$. . . 187

Глава 7
КУБАТУРНЫЕ ФОРМУЛЫ. . . . 191
1. Наилучшие кубатурные формулы. . . . 191
2. Об одном способе вычисления кратных интегралов. . . . 195

3. Оптимальные по порядку кубатурные формулы
на классе $Q_{r,\gamma,p}([-1,1]^l, M), l \geq 2$. 199
4. Кубатурные формулы на классе $B_{r,\gamma}(\Omega, M)$. 202
5. Асимптотически оптимальные кубатурные формулы
на классе $Q_r^*(\Omega, 1)$. 206
6. Асимптотически оптимальные весовые кубатурные формулы
на классах Гельдера. 210
7. Адаптивные алгоритмы вычисления интегралов
на классе $Q_{r,\gamma,p}([-1,1]^l, M), l \geq 2$.. 218

Список литературы 225

Это может показаться парадоксальным, но вся наука подчинена идее аппроксимации.

Бертран Рассел,

английский математик и философ

ПРЕДИСЛОВИЕ

Теория приближения функций и теория квадратурных и кубатурных формул являются активно развивающимися областями математики, имеющими многочисленные приложения практически во всех областях физики, механики и техники.

Исследованиям по теории приближения и по квадратурным и кубатурным формулам посвящено большое число статей и монографий. От имеющихся монографий данная книга отличается тем, что посвящена в основном построению наилучших способов приближения множеств функций, определенных в ограниченной замкнутой области Ω пространства R_l, $l = 1, 2, \ldots$, конечного числа измерений, модули производных которых неограниченно возрастают при приближении к границе Γ области Ω (классы функций $Q_{r,\gamma}(\Omega, M), B_{r,\gamma}(\Omega, M)$, определенные ниже). Помимо построения наилучших способов приближения функций, принадлежащих множествам $Q_{r,\gamma}(\Omega, M), B_{r,\gamma}(\Omega, M)$, в работе исследуются методы построения оптимальных, асимптотически оптимальных, оптимальных по порядку алгоритмов вычисления интегралов на этих классах функций.

Задача вычисления поперечников и ε-энтропии таких классов функций была поставлена К. И. Бабенко [11] в связи с исследованиями по построению оптимальных методов решения уравнений в частных производных.

Позднее оказалось, что к этим классам функций принадлежат решения слабосингулярных интегральных уравнений Фредгольма и Вольтерра, решения сингулярных интегральных уравнений, а также решения многочисленных задач механики, аэродинамики, электродинамики и геофизики.

В книге построены пассивные и адаптивные методы приближения функций и вычисления интегралов на классах функций $Q_{r,\gamma}(\Omega, M)$,
$B_{r,\gamma}(\Omega, M)$.

Построение пассивных алгоритмов основано на восходящей к П. Л. Чебышеву минимаксной концепции оптимальности, гарантирующей получение наилучших результатов при наихудшей на взятом классе исходной информации. Эта концепция положена в основу построения оптимальных по точности пассивных алгоритмов аппроксимации функций с особенностями у границы области и вычисления интегралов от функций с особенностями.

Построение адаптивных алгоритмов восстановления функций и вычисления интегралов основано на концепции оптимальности, гарантирующей получение наилучшего результата для конкретной функции из рассматриваемого класса.

Книга состоит из семи глав.

В первой главе дана постановка задачи, описаны классы функций, приведены необходимые сведения из теории приближений и теории квадратурных и кубатурных формул, используемые в работе.

Вторая глава посвящена вычислению поперечников классов функций, модули производных которых неограниченно возрастают при приближении к границе области, в частности, классов функций
$Q_{r,\gamma,p}(\Omega, M)$, $B_{r,\gamma}(\Omega, M)$.

В третьей главе вычислена ε-энтропия классов функций $Q_{r,\gamma,p}(\Omega, M)$ и $B_{r,\gamma}(\Omega, M)$ и построены оптимальные по порядку по сложности алгоритмы восстановления функций из этих множеств.

Четвертая глава посвящена проблеме представления функций многих переменных суперпозициями функций меньшего числа переменных. В ней изложены исследования А. Г. Витушкина по суперпозиции функций, приведены классические результаты В. И. Арнольда и
А. Н. Колмогорова по представлению функций многих переменных суперпозициями функций меньшего числа переменных, дано решение проблемы А. Н. Колмогорова о невозможности представления аналитических функций многих переменных непрерывно дифференцируемыми функциями меньшего числа переменных.

Пятая глава посвящена изложению адаптивных методов приближения функций, принадлежащих классам функций Соболева и $Q_{r,\gamma,p}(\Omega, M)$.

В шестой главе построены асимптотически оптимальные и оптимальные по порядку квадратурные формулы вычисления интегралов на классе функций $Q_{r,\gamma}(\Omega, M)$, $\Omega = [-1, 1]$.

В седьмой главе построены оптимальные по порядку кубатурные формулы вычисления интегралов на классах функций $Q_{r,\gamma}(\Omega, M)$ и $B_{r,\gamma}(\Omega, M)$, $\Omega = [-1, 1]^l$, $l = 2, 3, \ldots$.

Книга, в первую очередь, адресована специалистам в области теории функций и вычислительной математики. Отдельные параграфы книги могут быть использованы в качестве учебного пособия по дисциплинам "Квадратурные формулы" и "Теория приближений" для студентов специальности "Прикладная математика".

Исследования автора по теории приближений и теории квадратур были поддержаны Российским фондом фундаментальных исследований (гранты 94-01-00653, 97-01-00621), Министерством образования РФ (гранты по вычислительной математике 1994 – 1996 гг. и 1998 – 2000 гг.), Федеральным агентством по образованию (2005 г., регистрационный номер 0120.0502705).

Глава 1

ВВЕДЕНИЕ

1. Постановка задачи оптимизации

Постановка задачи построения наилучшей квадратурной формулы (к.ф.) принадлежит А. Н. Колмогорову и заключается в следующем. Пусть $\Psi-$ некоторый класс интегрируемых на сегменте [0,1] функций. Рассмотрим к.ф.

$$\int\limits_0^1 f(x)dx = \sum_{i=1}^{n} p_i f(x_i) + R_n(f, p_i, x_i), \tag{1.1}$$

где коэффициенты p_i и узлы $0 \le x_1 < \ldots < x_n \le 1$ произвольны. Погрешность к.ф. (1.1) на классе функций Ψ равна

$$R_n(\Psi, p_i, x_i) = \sup_{f \in \Psi} |R_n(f, p_i, x_i)|.$$

Введем величину $\zeta_n[\Psi] = \inf_{p_i, x_i} R_n(\Psi, p_i, x_i)$. Если существуют коэффициенты p_i^* и узлы $x_i^* (i = 1, 2, \ldots, n)$, при которых $\zeta_n(\Psi) = R_n(\Psi, p_i, x_i)$, то к.ф. (1.1) с весами p_i^* и узлами x_i^* называется наилучшей (или оптимальной) на классе Ψ. Н. С. Бахваловым введены [13] понятия асимптотически оптимальных и оптимальных по порядку пассивных алгоритмов решения задач численного анализа. Другие подходы к определению оптимальных пассивных алгоритмов предложены в книгах [79], [82], [89].

Следуя [13], к.ф. (1.1) с весами p_i^* и узлами x_i^* назовем асимптотически оптимальной или оптимальной по порядку на классе Ψ, если $R_n(\Psi, p_i^*, x_i^*) \sim \zeta_n(\Psi)$ или $R_n(\Psi, p_i^*, x_i^*) \asymp \zeta_n(\Psi)$ (напомним, $\alpha_n \sim \beta_n$ означает, что $\lim_{n \to \infty}(\alpha_n/\beta_n) = 1$, а $\alpha_n \asymp \beta_n-$ что $A \le (\alpha_n/\beta_n) \le B$, где A, B=const, $0 < A, B < \infty$.

При построении оптимальных методов восстановления функций нам понадобятся определения поперечников Бабенко и Колмогорова.

Пусть $B-$ банахово пространство, $X \subset B-$ компакт , $\Pi : X \to \bar{X}-$ представление компакта $X \subset B$ конечномерным пространством $\bar{X}$.

Определение 1.1 [82]. Пусть L^n- множество n-мерных линейных подпространств пространства B. Выражение

$$d_n(X, B) = \inf_{L^n} \sup_{x \in X} \inf_{u \in L^n} \|x - u\|,$$

где последний inf берется по всем подпространствам L^n размерности n, определяет n-поперечник Колмогорова.

Определение 1.2 [82]. Пусть $\chi-$ множество всех n-мерных линейных подпространств пространства $B, \mathrm{Map}(X,\chi)-$ совокупность всех непрерывных отображений вида $\Pi : X \to \bar{X}$, где $\bar{X} \in \chi$. Выражение

$$d_n'(X,B) = \inf_{(L^n,\Pi)} \sup_{x\in X} \|x - \Pi(x)\|,$$

где inf берется по всевозможным парам (L^n, Π), состоящим из n-мерного линейного пространства $L^n \subset B$ и непрерывного отображения $\Pi : X \to L^n$, определяет линейный n-поперечник Колмогорова.

Определение 1.3 [82]. Пусть $\chi \in R^n$. Выражение

$$d_n(X) = \inf_{(\Pi:X\to R^n)} \sup_{x\in X} \mathrm{diam}\Pi^{-1}\Pi(x),$$

где inf берется по всем непрерывным отображениям $\Pi : X \to R^n$, определяет n-поперечник Бабенко.

2. Классы функций

В этом разделе приведены классы функций, используемые в книге. Описание классов функций $W_p^r(1), W^{r,s}(1), H_j^w(D)$, $H_{w_1w_2}(D)$ дается по книге С. М. Никольского [64].

Класс функций Гельдера $H_\alpha(M; a, b)(0 < \alpha \le 1)$ состоит из заданных на отрезке $[a, b]$ функций $f(x)$, удовлетворяющих во всех точках x' и x'' этого отрезка неравенству $|f(x') - f(x'')| \le M|x' - x''|^\alpha$.

В случае, когда из текста ясно на каком множестве рассматриваются функции, вместо $H_\alpha(M; a, b)$ будем писать $H_\alpha(M)$. Это замечание относится и к остальным классам функций.

Класс $W^r(M; a, b)$ состоит из функций, заданных на отрезке $[a, b]$, непрерывных и имеющих непрерывные производные до $(r-1)$-го порядка включительно и кусочно-непрерывную производную r-го порядка, удовлетворяющую на этом отрезке неравенству $|f^{(r)}(x)| \le M$.

Класс $W_{L_p}^r(M; a, b)(1 \le p < \infty)$ состоит из функций, заданных на $[a, b]$, имеющих абсолютно непрерывную производную порядка $r-1$ и производную $f^{(r)}(x)$ порядка r, обладающую тем свойством, что

$$\left[\int\limits_a^b |f^{(r)}(x)|^p dx\right]^{1/p} \le M,$$

где интеграл понимается в смысле Лебега.

Для простоты обозначений ниже вместо $W^r_{L_p}(M)$ будем писать $W^r_p(M)$.

Через $W^1_0L(1)$ обозначено множество функций $\varphi(x)$, входящих в класс $W^1_1(1)$ и удовлетворяющих дополнительному условию: $\varphi(0)=0$.

Через $\tilde{W}^r_p(M;a,b)$ обозначен класс периодических с периодом $(b-$
$-a)$ функций, входящих в класс $W^r_p(M;a,b)$.

Через $H_{w_1w_2}(D)$ обозначен класс определенных на $D=\{a\le x\le$ $\le b, c\le y\le d\}$ функций $f(x,y)$ таких, что для любых точек (x',y') и (x'',y'') из D $|f(x',y')-f(x'',y'')|\le w_1(|x'-x''|)+w_2(|y'-y''|)$, где $w_1(\sigma)$ и $w_2(\sigma)-$ заданные модули непрерывности. В случаях, когда $w_i(x)=M_ix^{\alpha_i}\quad(i=1,2)$, используется обозначение $H_{\alpha_1\alpha_2}(M,D)$, где $M=\max(M_1,M_2)$.

В статье В. Ф. Бабенко [8] рассматривались классы функций $H^w_j(D)\ \left(Z^w_j(D)\right)\ (j=1,2,3)$, определенных в области D. Функция $\varphi\in H^w_j(D)$
$\left(Z^w_j(D)\right)$, если $|\varphi(x)-\varphi(y)|\le w(\rho_j(x,y))\quad(x=(x_1,\dots,x_l),$
$y\ =\ (y_1,\dots,y_l)\left(|\varphi(x)+\varphi(y)-2\varphi\left((x+y)/2\right)|\le\left(2^{-1}\rho_j(x,y)\right)^{\alpha}\right),$
где

$$\rho_1(x,y)=\max_{1\le i\le l}(|x_i-y_i|),\quad \rho_2(x,y)=\sum_{i=1}^{l}|x_i-y_i|,$$

$$\rho_3(x,y)=\left[\sum_{i=1}^{l}|x_i-y_i|^2\right]^{1/2}.$$

Через $C^r_l(1)$ обозначен класс функций l независимых переменных, у которых существуют и ограничены по модулю единицей все частные производные до r-го порядка включительно.

Через $W^{r_1,\dots,r_l}_*L_p(G)$ обозначен класс функций $f(x_1,\dots,x_l)$, имеющих частные производные $f^{(k_1,\dots,k_l)}(x_1,\dots,x_l)=\partial^nf/\partial x_1^{k_1}\cdots\partial x_l^{k_l},\quad k=$ $=k_1+\dots+k_l,\quad 0\le k_i\le r_i,\quad i=1,2,\dots,l$, удовлетворяющие условиям

$$\|\int_0^1\cdots\int_0^1 f^{(r_1,0,\dots,0)}(x_1,\dots,x_l)dx_2\cdots dx_l\|_{L_p[0,1]}\le 1,\dots,$$

$$\|\int_0^1\cdots\int_0^1 f^{(0,0,\dots,0,r_l)}(x_1,\dots,x_l)dx_1\cdots dx_{l-1}\|_{L_p[0,1]}\le 1,$$

$$\|\int\limits_0^1\cdots\int\limits_0^1 f^{(r_1,r_2,0,\dots,0)}(x_1,\dots,x_l)dx_3\cdots dx_l\|_{L_p([0,1]^2)}\leq 1,\dots,$$

$$\|f^{(r_1,\dots,r_l)}(x_1,\dots,x_l)\|_{L_p(G)}\leq 1.$$

Здесь $1\leq p\leq\infty$, $G=[0,1]^l$.

Через $\bar{W}_*^{r,s}L_p(G)$ обозначено множество функций, входящих в класс $W_*^{r,s}L_p(G)$ и обладающих дополнительным свойством:

$$\|\varphi^{(r,0)}(x_1,0)\|_{L_p[0,1]}\leq 1,\qquad \|\varphi^{(0,s)}(0,x_2)\|_{L_p[0,1]}\leq 1.$$

Обозначим через $L(x,a,k)$ пересечение прямой $y=k(x-a)$ с квадратом $[0,2\pi]^2$.

Обозначим через $V_{L(x,a,k)}f(x,y)$ вариацию функции $f(x,y)$ на отрезке $L(x,a,k)$.

Определение 2.1. Будем говорить, что множество функций $f(x,y)$ имеет ограниченую L вариацию, если

$$V_L(f)=\sup_{-\infty<a<\infty,-\infty<k<\infty}V_{L(x,a,k)}f(x,y)<\infty.$$

Это множество функций обозначается $V_L^*(f)$.

Пусть функция $f(x_1,x_2,\dots,x_l)$ непрерывна в l-мерном кубе G_l, определенном неравенствами $0\leq x_v\leq 2\pi(v=1,2,\dots,l)$ и имеет период, равный 2π по каждой переменной $x_1,x_2,\dots,x_l$. Через $C(m_1,\dots,m_l)$ обозначены коэффициенты Фурье этой функции. Величины $\bar{m}_v$ определены равенствами $\bar{m}_v=1$, если $m_v=0,\bar{m}_v=|m_v|$, если $m_v\neq 0$.

Определение 2.2. Функция $f(x_1,x_2,\dots,x_l)$ принадлежит классу
$E_l^\alpha(C)$, если выполняется оценка $C(m_1,\dots,m_l)=A((\bar{m}_1\cdot\bar{m}_2\cdots\bar{m}_l)^{-\alpha})$, где $a-$ действительное число, большее $1/2$, и константа A не зависит от $m_1,m_2,\dots,m_l$.

Определение 2.3. Пусть $a\geq 1-$ целое число. Функция $f(x_1,\dots,x_l)$ периодическая, с периодом, равным единице по каждой переменной, принадлежит классу $\tilde{H}_{l,p}^\alpha(1)$, если она имеет непрерывные производные вида

$$f^{(n_1,\dots,n_l)}(x_1,\dots,x_l)=\partial^n f/\partial x_1^{n_1}\cdots\partial x_l^{n_l},\quad 0\leq n\leq\alpha l,\quad 0\leq n_j\leq\alpha,$$

удовлетворяющие условиям:

$$\|f^{(\alpha,0,\dots,0)}(x_1,\dots,x_l)\|_{L_p}\leq 1,\dots,\|f^{(0,0,\dots,0,\alpha)}(x_1,\dots,x_l)\|_{L_p}\leq 1, 1\leq p\leq\infty.$$

Определение 2.4. Пусть $\alpha \geq 1$– целое число. Функция $f(x_1, \ldots, x_l)$ периодическая с периодом, равным единице по каждой переменной, принадлежит классу $\tilde{D}^{\alpha}_{l,p}(1)$, если она имеет непрерывные производные вида $f^{(n_1,\ldots,n_l)}(x_1, \ldots, x_l), \qquad 0 \leq n \leq \alpha l, \qquad 0 \leq n_j \leq \alpha l$,
удовлетворяющие условиям: $\|f^{(\alpha,0,\ldots,0)}(x_1, \ldots, x_l)\|_{L_p} \leq 1, \ldots,$
$\|f^{(0,\ldots,0,\alpha)}(x_1, \ldots, x_l)\|_{L_p} \leq 1, \quad 1 \leq p \leq \infty.$

Классы $\tilde{H}^{\alpha}_{l,p}, \tilde{D}^{\alpha}_{l,p}$ являются обобщением классов $H^{\alpha}_{l}, D^{\alpha}_{l}$, введенных, наряду с классом E^{α}_{l}, в монографии [52].

Определение 2.5. Пусть $m_i (i = 1, 2, \ldots, l)$– выпуклое, центрально-симметричное множество функций одной переменной, инвариантное относительно сдвига на константу. Будем говорить, что функция $f(x_1, \ldots, x_l) \in m_{1,\ldots,l}$, если функция

$$\varphi_k(x_k) = \int_0^1 \cdots \int_0^1 f(x_1^0, \ldots, x_{k-1}^0, x_k, \ldots, x_l) dx_{k+1} \cdots dx_l,$$

где x_i^0 $(0 \leq x_i^0 \leq 1,\ i = 1, 2, \ldots, k-1)$– произвольно фиксированные значения, входит в класс $m_k, \quad k = 1, 2, \ldots, l.$

В работе К. И. Бабенко [11] введен класс функций $Q_r(\Omega, M)$.

Определение 2.6. Пусть $\Omega = [-1, 1]^l, \qquad l = 1, 2, \ldots.$ Функция $\varphi(x_1 \ldots, x_l)$ принадлежит классу $Q_r(\Omega, M)$, если выполнены условия

$$\max_{x \in \Omega} |\partial^{|v|} \varphi(x_1, \ldots, x_l)/\partial x_1^{v_1} \cdots \partial x_l^{v_l}| \leq M$$

при $0 \leq |v| \leq r$,

$$|\partial^{|v|} \varphi(x_1, \ldots, x_l)/\partial x_1^{v_1} \cdots \partial x_l^{v_l}| \leq M/(d(x, \Gamma))^{|v|-r}$$

при $r < |v| \leq 2r + 1$,
где $x = (x_1, \ldots, x_l)$, $v = (v_1, \ldots, v_l)$, $|v| = v_1 + \cdots + v_l$, $d(x, \Gamma)$– расстояние от точки x до границы Γ области Ω, вычисляемое по формуле $d(x, \Gamma) = \min_{1 \leq i \leq l} \quad \min(|-1 - x_i|, |1 - x_i|)$.

Определение 2.7 [22]. Пусть $\Omega = [-1, 1]^l, \qquad l = 1, 2, \ldots.$ Функция $\varphi(x_1 \ldots, x_l)$ принадлежит классу $Q_{r,\gamma}(\Omega, M)$, если выполнены условия

$$\max_{x \in \Omega} |\partial^{|v|} \varphi(x)/\partial x_1^{v_1} \cdots \partial x_l^{v_l}| \leq M$$

при $0 \leq |v| \leq r$,

$$|\partial^{|v|} \varphi(x)/\partial x_1^{v_1} \cdots \partial x_l^{v_l}| \leq M/(d(x, \Gamma))^{|v|-r-\zeta}$$

при $r < |v| \leq s$,
где $s = r + [\gamma] + 1, \quad \gamma = [\gamma] + \mu, \quad 0 < \mu < 1, \quad \zeta = 1 - \mu$ при $\gamma-$ нецелом, $s = r + \gamma$ при $\gamma-$ целом.

Определение 2.8. Пусть $\Omega = [-1,1]^l, \qquad l = 1, 2, \ldots, \gamma-$ целое число, $s = r + \gamma$. Функция $\varphi(x_1, \ldots, x_l)$ принадлежит классу $\bar{Q}_{r,\gamma}(\Omega, M)$, если выполнены условия

$$\max_{x \in \Omega} |\partial^{|v|}\varphi(x)/\partial x_1^{v_1} \cdots \partial x_l^{v_l}| \leq M$$

при $0 \leq |v| \leq r - 1$,

$$|\partial^{|v|}\varphi(x)/\partial x_1^{v_1} \cdots \partial x_l^{v_l}| \leq M |\ln d(x, \Gamma)|$$

при $|v| = r$,

$$|\partial^{|v|}\varphi(x)/\partial x_1^{v_1} \cdots \partial x_l^{v_l}| \leq M/(d(x, \Gamma))^{v-r}$$

при $r < |v| \leq s$.

Определение 2.9 [22]. Пусть $\Omega = [-1,1]^l, \quad l = 1, 2, \ldots$. Функция $\varphi(x_1, \ldots, x_l)$ принадлежит классу $Q_{r,\gamma,p}(\Omega, M) \quad (r = 1, 2, \ldots, \quad 1 \leq$
$\leq p < \infty)$, если выполнены условия

$$\max_{x \in \Omega} |\partial^{|v|}\varphi(x_1, \ldots, x_l)/\partial x_1^{v_1} \cdots \partial x_l^{v_l}| \leq M$$

при $|v| \leq r$,

$$\left[\int \int_{\Omega} |d^{|v|-r-\zeta}(x, \Gamma)\partial^{|v|}\varphi(x_1, \ldots, x_l)/\partial x_1^{v_1} \cdots \partial x_l^{v_l}|^p dx_1 \cdots dx_l\right]^{1/p} \leq M$$

при $r < |v| \leq s$, где $s = r + \gamma, \quad \zeta = 0$, если $r + \gamma-$ целое; $s =$
$= r + [\gamma] + 1, \quad \gamma = [\gamma] + \mu, \quad 0 < \mu < 1, \quad \zeta = 1 - \mu$, если $r + \gamma-$ нецелое.

Определение 2.10. Пусть $\Omega = [-1,1]^l, \quad l = 1, 2, \ldots, \gamma-$ целое число. Функция $\varphi(x_1, \ldots, x_l)$ принадлежит классу $\bar{Q}_{r,\gamma,p}(\Omega, M) \quad (r =$
$= 1, 2, \ldots, \quad 1 \leq p < \infty)$, если выполнены условия

$$\max_{x \in \Omega} |\partial^{|v|}\varphi(x_1, \ldots, x_l)/\partial x_1^{v_1} \cdots \partial x_l^{v_l}| \leq M$$

при $0 \leq |v| \leq r - 1$,

$$|\partial^{|v|}\varphi(x)/\partial x_1^{v_1} \cdots \partial x_l^{v_l}| \leq M |\ln d(x, \Gamma)|$$

при $|v| = r$,

$$\left[\int\limits_{\Omega}\int |d^{|v|-r}(x,\Gamma)\partial^{|v|}\varphi(x_1,\ldots,x_l)/\partial x_1^{v_1}\cdots\partial x_l^{v_l}|^p dx_1\cdots dx_l \right]^{1/p} \le M$$

при $r < |v| \le s$, где $s = r + \gamma$.

Определение 2.11 [22]. Пусть $\Omega = [-1,1]^l$, $\quad l = 1,2,\ldots,$ $\quad r = 1,2,\ldots,$
$0 < \gamma \le 1$. Функция $f(x_1,\ldots,x_l)$ принадлежит классу $B_{r,\gamma}(\Omega, M)$, если выполнены условия

$$\max_{x\in\Omega} |\partial^{|v|}\varphi(x_1,\ldots,x_l)/\partial x_1^{v_1}\cdots\partial x_l^{v_l}| \le M^{|v|}|v|^{|v|}$$

при $0 \le |v| \le r$,

$$|\partial^{|v|}\varphi(x_1,\ldots,x_l)/\partial x_1^{v_1}\cdots\partial x_l^{v_l}| \le M^{|v|}|v|^{|v|}/(d(x,\Gamma))^{|v|-r-1+\gamma}$$

при $r < |v| \le \infty$.

Определение 2.12. Пусть $\Omega = [-1,1]^l$, $\quad l = 1,2,\ldots,$ $\quad r = 1,2,\ldots,$
$\gamma = 1$. Функция $f(x_1,\ldots,x_l)$ принадлежит классу $\bar{B}_{r,\gamma}(\Omega, M)$, если выполнены условия

$$\max_{x\in\Omega} |\partial^{|v|}\varphi(x_1,\ldots,x_l)/\partial x_1^{v_1}\cdots\partial x_l^{v_l}| \le M^{|v|}|v|^{|v|}$$

при $0 \le |v| \le r-1$,

$$|\partial^{|v|}\varphi(x)/\partial x_1^{v_1}\cdots\partial x_l^{v_l}| \le M|\ln d(x,\Gamma)|$$

при $|v| = r$,

$$|\partial^{|v|}\varphi(x_1,\ldots,x_l)/\partial x_1^{v_1}\cdots\partial x_l^{v_l}| \le M^{|v|}|v|^{|v|}/(d(x,\Gamma))^{|v|-r-1+\gamma}$$

при $r < |v| \le \infty$.

3. Элементы теории приближений

В данном разделе приводится ряд известных фактов из теории приближений, которыми будем пользоваться на протяжении книги.

В настоящее время в теории приближений принято [87] выделять три этапа.

Первый этап, начавшийся в 1854 г., связан с появлением работы

П. Л. Чебышева [92]. В этот период исследовались способы аппроксимации конкретных функций полиномами и рациональными функциями.

Второй этап датируется 1912 г., когда в свет вышли работы С .Н. Бернштейна [94] и Д. Джексона [96] и посвящен исследованию взаимосвязи гладкости функций с оценками их наилучших приближений полиномами.

Начало третьего этапа связано с выходом из печати статьи А. Н. Колмогорова [97]. В работах этого периода исследовались наилучшие методы приближения классов функций. При этом использовались любые аппараты приближения, имеющие одинаковую размерность (число используемых параметров). Основой этих исследований являются вычисления поперечников и энтропии компактных множеств.

В 1962 г., выступая на Стокгольмском математическом конгрессе, А. Н. Колмогоров выдвинул программу исследования сложности алгоритмов, воспроизводящих функции с заданной точностью. Как отмечает В. М. Тихомиров [87] исследование в этом направлении возможно составит четвертый этап в теории приближений.

Прежде всего напомним некоторые классические результаты конструктивной теории функций. При изложении этих результатов будем следовать монографиям [38], [62], [83].

3.1. Некоторые обозначения

Опишем обозначения, используемые в книге.

Через $R_{rq}(a;h;x)$ обозначим многочлен вида $x^r+\sum\limits_{i=0}^{r-1}\alpha_i x^i$, такой, что

$$\int\limits_{a-h}^{a+h}|R_{rq}(a;h;x)|^q dx=\min_{\alpha_0,\dots,\alpha_{r-1}}\int\limits_{a-h}^{a+h}|x^r+\sum_{i=0}^{r-1}\alpha_i x^i|^q dx.$$

При $a=0$ и $h=1$ вместо $R_{rq}(0;1;x)$ будем писать $R_{rq}(x)$. Следовательно, $R_{rq}(x)$ есть полином вида $x^r+\sum\limits_{i=0}^{r-1}\alpha_i x^i$ наименее уклоняющийся от нуля в метрике пространства $L_q[-1,1], \quad 1\le q\le\infty$.

Пусть $\Delta=[a,b], \quad c\in[a,b]$. Через $T_r(\varphi,\Delta,c)$ обозначен отрезок ряда Тейлора

$$T_r(\varphi,\Delta,c)=\varphi(c)+\frac{\varphi'(c)}{1!}(t-c)+\dots+\frac{\varphi^{(r)}(c)}{r!}(t-c)^r.$$

Пусть $\Delta=[a_1,b_1;a_2,b_2], \quad c\in\Delta$. Через $T_r(\varphi,\Delta,c)$ обозначим отрезок ряда Тейлора $T_r(\varphi,\Delta,c)=\varphi(c)+\frac{1}{1!}d\varphi(c)+\dots+\frac{1}{r!}d^r\varphi(c)$.

Через K_r обозначена константа Фавара

$$K_r=\frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k(r+1)}}{(2k+1)^{r+1}}, \qquad r=0,1,\dots.$$

Пусть $f(t)\in H_\alpha, 0<\alpha\le 1, t\in[a,b]$. Тогда

$$H(f,\alpha)=\sup_{t_1\ne t_2;t_1,t_2\in[a,b]}\frac{|f(t_1)-f(t_2)|}{|t_1-t_2|^\alpha}.$$

3.2. Полиномы наилучшего приближения

Пусть $f(x)-$ функция, определенная на сегменте $[a,b]$. Обозначим через H_n множество полиномов степени не выше n, т. е. полиномов вида $P_n(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n$, а через H_n^T – множество тригонометрических полиномов вида $a_0+\sum\limits_{k=1}^{n}a_k\cos kx+b_k\sin kx$.

Рассмотрим произвольный полином $P_n(x)$ и положим

$$\Delta(P_n)=\max_{x\in[a,b]}\mid P_n(x)-f(x)\mid.$$

Число $\Delta(P_n)$ называется отклонением полинома $P_n(x)$ от функции $f(x)$. Если будем изменять полином $P_n(x)$, заставляя его пробегать все множество H_n, то величина $\Delta(P_n)$ также будет изменяться, но так как она остается неотрицательной, то множество ее значений ограничено снизу и имеет точную нижнюю границу

$$E_n = E_n(f) = \inf_{P_n \in H_n} \{\Delta(P_n)\}.$$

Величина $E_n(f)$ называется наименьшим отклонением полиномов из H_n от $f(x)$ или наилучшим приближением к $f(x)$ полиномами из H_n.

Теорема 3.1 (теорема Бореля). Для всякой функции $f(x) \in \in C[a,b]$ в множестве H_n существует такой полином $P(x)$, что $\Delta(P) = E_n(f)$.

Следует отметить, что для всякой функции $f(x) \in C[a,b]$ в множестве H_n существует единственный полином наилучшего приближения. Это утверждение следует из теоремы Бореля и чебышевского альтернанса.

Приведем оценки наилучших приближений к $f(x)$ полиномами из H_n. Вначале дадим формулировки классических теорем Джексона.

Теорема 3.2. Для любой функции $f \in C_{2\pi}$ справедлива оценка

$$E_n(f) \leq 12\omega\left(\frac{1}{n}\right).$$

Теорема 3.3. Пусть $f(x)$ есть непрерывная 2π-периодическая функция, имеющая непрерывные производные $f'(x), f''(x), \ldots, f^{(r)}(x)$. Если $\omega_r(\delta)$– модуль непрерывности r-й производной $f^{(r)}(x)$, то

$$E_n(f) \leq \frac{12^{r+1}\omega_r\left(\frac{1}{n}\right)}{n^r}.$$

Если функция $f(x)$ приближается алгебраическими полиномами, то теоремы Джексона формулируются следующим образом.

Теорема 3.4. Если $f(x) \in C[a,b]$, то

$$E_n(f) \leq 12\omega\left(\frac{b-a}{2n}\right).$$

Теорема 3.5. Если $f(x) \in C[a,b]$ имеет p непрерывных производных, причем модуль непрерывности p-й производной $f^{(p)}$ есть $\omega_p(\delta)$, то для $n > p$ справедлива оценка

$$E_n(f) \leq \frac{C_p(b-a)^p}{n^p}\omega_p\left(\frac{b-a}{2(n-p)}\right),$$

где C_p зависит только от p.

Наряду с оценками наилучших приближений тригонометрическими и алгебраическими полиномами различных классов функций,
т. е. прямыми теоремами конструктивной теории функций, нам понадобятся обратные теоремы конструктивной теории функций, позволяющие по числовым характеристикам $E_n(f)$ судить о классах функций, к которым принадлежат функции $f(x)$.

Предварительно приведем неравенства С. Н. Бернштейна,
А. А. Маркова и С. М. Никольского, которыми также будем неоднократно пользоваться.

Теорема 3.6 (первое неравенство Бернштейна). Если

$$T(x) = A + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos kx + b_k \sin kx) -$$

тригонометрический полином порядка n, то справедлива оценка

$$|T'(x)| \leq n \max |T(x)|.$$

Теорема 3.7 (второе неравенство Бернштейна). Если полином $P_n(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$ степени не выше n на сегменте $[a, b]$ удовлетворяет неравенству $|P_n(x)| \leq M$, то на интервале (a, b) $|P'_n(x)| \leq$
$\leq \frac{Mn}{((x-a)(b-x))^{1/2}}$.

Теорема 3.8 (неравенство Маркова). Если полином $P_n(x) =$
$= a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$ степени не выше n на сегменте $[a, b]$ удовлетворяет неравенству $|P_n(x)| \leq M$, то на том же сегменте $|P'_n(x)| \leq$
$\leq 2Mn^2/(b - a)$.

Теорема 3.9 (неравенство С. М. Никольского) [66]. Пусть $T_n(t)-$ тригонометрический полином n-го порядка. Тогда справедливо неравенство

$$\|T_n(t)\|_C \leq n^{1/p} \|T_n(t)\|_{L_p},\ 1 \leq p \leq \infty.$$

Аналогичное неравенство справедливо и для функций экспоненциального типа.

Теорема 3.10 [66]. Если $1 \leq p \leq p' \leq \infty$, то для целой функции экспоненциального типа $g = g_v \in L_p(R_n)$, $v = (v_1, \ldots, v_n)$, имеет место неравенство (разных метрик)

$$\|g_v\|_{L_{p'}(R_n)} \leq 2^n \left(\prod_{k=1}^{n} v_k\right)^{\frac{1}{p} - \frac{1}{p'}} \|g_v\|_{L_p(R_n)}.$$

При фиксированных n и произвольных v_k это неравенство точно в смысле порядка.

Приводимые ниже обратные теоремы конструктивной теории функций принадлежат С. Н. Бернштейну.

Теорема 3.11. Пусть $f(x) \in C_{2\pi}$ и для любого n наилучшее приближение полиномами из H_n^T $E_n(f) \leq An^{-\alpha}$. Тогда если $0 < \alpha < 1$, то $f(x) \in H_\alpha$, а если $\alpha = 1$, то $f(x) \in Z$.

Теорема 3.12. Пусть $f(x) \in C_{2\pi}$ и $E_n(f)$ – ее наилучшее приближение полиномами из H_n^T. Если $E_n \leq \frac{A}{n^{r+\alpha}}$, где $r-$ натуральное число, а $0 < \alpha \leq 1$, то у функции $f(x)$ существуют непрерывные производные $f'(x), f''(x), \ldots, f^{(r)}(x)$, причем $f^{(r)} \in H_\alpha$, если $\alpha < 1$, и $f^{(r)} \in Z$, если $\alpha = 1$.

Напомним, что через Z обозначен класс функций Зигмунда, определенный следующим соотношением: для модуля непрерывности $\omega(\delta)$ справедливо неравенство $\omega(\delta) \leq A\delta(1 + |\ln\delta|)$, где A не зависит от δ.

Изложенные выше результаты принадлежат в основном классикам конструктивной теории функций: П. Л. Чебышеву, С. Н. Бернштейну, Д. Джексону и относятся к первому периоду в теории приближений. Их подробное изложение имеется в [36], [38], [62], [83].

В 50 – 70-е гг. прошлого столетия в конструктивной теории функций были получены новые результаты, многие из которых являются неулучшаемыми. Не имея возможности остановиться на этих результатах, приведем теорему типа Джексона об оценках наилучших приближений.

Теорема 3.13 [50, с. 237]. Для любой функции $f \in \tilde{C}_{2\pi}, f \not\equiv \mathrm{const}$ справедливы неравенства $E_n(f)_C < \omega(f, \frac{\pi}{n}), n = 1, 2, \ldots$, причем не зависящая от f и от n константа 1 перед $\omega(f, \frac{\pi}{n})$ не может быть уменьшена.

Современное состояние конструктивной теории функций и точные оценки приближений полиномами, отрезками рядов и сплайнами изложены в монографиях и обзорах [7], [34], [38] – [40], [50], [51], [62], [66], [81], [83], [84] – [88], [99].

3.3. Интерполяционные полиномы

Мы будем пользоваться следующими известными оценками точности аппроксимации полиномами.

Лемма 3.1 [83, с. 276]. Если функция $f(x)$, заданная на $[-1, 1]$, имеет r-ю ($r \geq 0$ целое) непрерывную производную, то существует константа M_r, не зависящая от f, x и n, такая, что для любого $n > r$ найдется алгебраический многочлен $P_n(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k x^k$ степени не выше, чем n, удовлетворяющий для каждого $x \in [-1, 1]$

неравенству

$$|f(x)-P_n(x)| \le$$

$$\le M_r\left[\frac{1}{n}\left(\sqrt{1-x^2}+\frac{|x|}{n}\right)\right]^r \omega\left[\frac{1}{n}\left(\sqrt{1-x^2}+\frac{|x|}{n}\right)\right],$$

где $\omega(t)=\omega(f^{(r)};t)$ есть модуль непрерывности r-й производной.

Обозначим через $T_r(x)$ полином Чебышева степени r, наименее уклоняющийся от нуля в равномерной метрике на сегменте $[-1,1]$, а через $x_1,\ldots,x_r-$ его корни. Через $P_r(x,[-1,1])$ обозначим полином, интерполирующий функцию $f(x)$ на сегменте $[-1,1]$ по узлам $x_1,\ldots,x_r$.

Лемма 3.2 [36]. Справедлива оценка погрешности интерполяционной формулы $P_r(x,[-1,1])$

$$\|f(x)-P_r(x,[-1,1])\| \le \|f^{(r)}\|/r!2^{r-1}.$$

Доказательство. Для произвольного $t\in[-1,1]$, $t\ne x_k$, $k= =1,2,\ldots,r$, положим

$$\tau=\frac{f(t)-P_r(t,[-1,1])}{T_r(t)}. \qquad (3.1)$$

Введем функцию

$$\varphi(x)=f(x)-P_r(x,[-1,1])-\tau T_r(x).$$

Функция $\varphi(x)$ обращается в нуль в точках t, $x_k, k=1,2,\ldots,r$. Применяя к функции $\varphi(x)$ $r+1$ раз теорему Ролля, убеждаемся, что существует точка ξ ($\xi\in(-1,1)$), такая, что

$$\varphi^{(r)}(\xi)=f^{(r)}(\xi)-\tau r!=0.$$

Отсюда $\tau=f^{(r)}(\xi)/r!$.

Используя соотношение (3.1), имеем при $x\ne x_k$, $k=1,2,\ldots,r$,

$$|f(x)-P_r(x,[-1,1])|=|\tau||T_r(x)|\le\frac{|f^{(r)}(\xi)|}{r!}|T_r(x)|\le\frac{1}{2^{r-1}r!}\|f^{(r)}(x)\|.$$

В узлах x_k, $k=1,2,\ldots,r$, утверждение леммы очевидно.

Лемма доказана.

Аналогичные утверждения имеют место и при интерполяции функций по узлам других ортогональных многочленов. В частности, нам понадобится оценка точности интерполирования функций из класса $W^r(M)$ по узлам полиномов Лежандра.

Обозначим через $\tilde{X}_n(x)$ полином Лежандра

$$\tilde{X}_n(x) = \frac{n!}{(2n)!}\frac{d^n(x^2-1)^n}{dx^n}$$

со старшим коэффициентом, равным 1. Обозначим через x_k, $k = 1, 2, \dots, n$, узлы полинома Лежандра, а через $P_n(x, [-1, 1])-$ интерполяционный полином Лагранжа, построенный по этим узлам.

Лемма 3.3. Справедлива оценка погрешности интерполяционной формулы $P_n(x, [-1, 1])$ по узлам полинома Лежандра

$$\|f(x) - P_n(x, [-1, 1])\| \leq \|f^{(n)}(x)\|/(2n)!.$$

Доказательство проводится по аналогии с доказательством предыдущей леммы. Для произвольного $t \in [-1, 1]$, $t \neq x_k$, $k = 1, 2, \dots, n$, положим

$$\tau = \frac{f(t) - P_n(f, [-1, 1])}{\tilde{X}_n(t)}$$

и введем функцию $\varphi(x) = f(x) - P_n(x, [-1, 1]) - \tau\tilde{X}_n(x)$. Функция $\varphi(x)$ по построению имеет $n+1$ корень, и, следовательно, по теореме Ролля существует такая точка ξ, $-1 < \xi < 1$, в которой $\varphi^{(n)}(\xi) = 0$. Это означает, что $f^{(n)}(\xi) - \tau n! = 0$. Следовательно, $\tau = f^{(n)}(\xi)/n!$ и

$$\|f(x) - P_n(x, [-1, 1])\| \leq |\tau|\|\tilde{X}_n(x)\| \leq \|f^{(n)}\|/(2n)!$$

в точках $x \neq x_k$, $k = 1, 2, \dots, n$. В узлах x_k, $k = 1, 2, \dots, n$, утверждение леммы очевидно.

Лемма доказана.

Через $W_p^s(\Delta)$ обозначается пространство Соболева с нормой

$$\|u\|_{W_p^s(\Delta)} = \|u\|_{L_p(\Delta)} + \|u\|_{L_p^s(\Delta)},$$

где

$$\|u\|_{L_p^s(\Delta)} = \left[\sum_{|v|=s}\int_{\Delta} \mid D^v u \mid^p dx\right]^{1/p}.$$

Пусть $\Delta-$ куб размерности l. Положим $w = s-1$ и поставим в соответствие каждой функции $u = W_p^s(\Delta)$ полином $R_w(x)$ степени w, удовлетворяющий условиям:

$$\int_{\Delta} x^\alpha R_w(x)dx = \int_{\Delta} x^\alpha u(x)dx, \quad \mid \alpha \mid \leq w.$$

Положим $R_w(x) = P_\Delta u$, т. е. $P_\Delta-$ линейный оператор проектирования, отображающий пространство $W_p^s(\Delta)$ на конечномерное пространство полиномов степени w от l переменных.

Справедливы следующие утверждения.

Лемма 3.4 [16, с. 341]. При $sp > l$ для любой функции $u \in W_p^s(\Delta)$ выполняется неравенство

$$\|u - P_\Delta u\|_{C(\Delta)} \leq C(\text{mes}\Delta)^{s/l-1/p}\|u\|_{L_p^s(\Delta)},$$

причем константа $C = C(p, s, l)$ не зависит от куба Δ.

Лемма 3.5 [16, с. 341]. При $ps \leq l$ и $q < q^* = p(1 - ps/l)^{-1}$ для любой функции $u \in W_p^s(\Delta)$ выполняется неравенство

$$\|u - P_\Delta u\|_{L_q(\Delta)} \leq C(\text{mes}\Delta)^{q^{-1}-q^{*-1}}\|u\|_{L_p^s(\Delta)},$$

причем константа $C = C(p, q, s, l)$ не зависит от куба Δ; $1/p+1/q = 1$.

3.4. Элементы теории сплайнов

На протяжении всей книги неоднократно используются методы сплайн – интерполяции. Напомним определения сплайнов, необходимые в дальнейшем.

Функция $f(x)$, заданная на сегменте $[a, b]$, называется сплайном порядка m $(m = 0, 1, \cdots)$ с узлами t_k, $k = 1, 2, \ldots, N$, $a < t_1 < t_2 < \cdots < < \cdots t_N < b$, если в каждом сегменте $[a, t_1], [t_1, t_2], \ldots, [t_N, b]$ функция $f(x)$ является алгебраическим полиномом степени m и в каждой из точек t_k, $k = 1, 2, \ldots, N$, некоторая производная $f^{(v)}(x)$, $0 \leq v \leq m$, имеет разрыв.

Говорят, что сплайн $f(x)$ порядка m имеет дефект r_k $(1 \leq r_k \leq \leq m)$ в узле t_k, $k = 1, 2, \ldots, N$, если в точке t_k непрерывны функции $f(x)$, $f'(x), \ldots, f^{(m-r_k)}(x)$, а производная $f^{(m-r_k+1)}(x)$ в точке t_k терпит разрыв.

Число $r = \max\limits_{1\leq k\leq N} r_k$ называется дефектом сплайна.

Будем говорить, что в узле t_k, $k = 1, 2, \ldots, N$, сплайн $f(x)$ имеет дефект $m + 1$, если в этом узле функция $f(x)$ имеет разрыв непрерывности. В этом случае будем говорить, что сплайн $f(x)$ имеет дефект $m + 1$.

Пусть на сегменте $[a, b]$ фиксирована система точек $\Delta_N : a = = t_0 < t_1 < \cdots < t_N = b$, которая называется разбиением сегмента $[a, b]$. Через $S_m^r(\Delta_N, [a, b])$ обозначим множество заданных на $[a, b]$ сплайнов порядка m, имеющих узлы с дефектами $r_i \leq r$ в точках $t_i (i = 1, 2, \ldots, N - 1)$ разбиения Δ_N. Сплайны, имеющие дефект

$m+1$ называются нулевыми и обозначаются через $S_0(\Delta_N, [a,b])$. При рассмотрении периодических сплайнов в качестве основного промежутка $[a,b]$ будем брать сегмент $[0, 2\pi]$ и вместо обозначения $S^r_m(\Delta_N, [a,b])$ будем использовать обозначение $S^r_m(\Delta_N)$.

Пусть дано равномерное разбиение $\bar{\Delta}_{2n} : \{k\pi/n\}$, $k = 1, 2, \dots, 2n$. Линейное многообразие сплайнов $S^1_m(\bar{\Delta}_{2n})$ дефекта 1 по равномерному разбиению $\bar{\Delta}_{2n}$ в дальнейшем обозначается как $S_{2n,m}$.

В последующих главах книги сплайны используются для аппроксимации функций, принадлежащих множествам $Q_{r,\gamma,p}(\Omega, M)$ и
$B_{r,\gamma}(\Omega, M)$. Поэтому нас интересуют оценки погрешности при приближении гладких функций сплайнами. При изложении этих вопросов будем следовать монографии Н. П. Корнейчука [51].

Прежде всего остановимся на приближении непрерывных функций кусочно-постоянными функциями, т. е. нулевыми сплайнами. Пусть на сегменте $[a,b]$ дано фиксированное разбиение $\Delta_N : a = t_0 < t_1 <$
$< \dots < t_N = b$. Обозначим через $|\Delta_N|$ величину $|\Delta_N| = \max\limits_{0\le k\le N-1} |t_{k+1} -$
$-t_k|$. Наряду с модулем непрерывности $\omega(f,\delta)_{C[a,b]}$ функции $f \in C[a,b]$ вводится величина

$$\Omega(f, \Delta_N, [a,b]) = \max_{1\le i\le N} \Omega_i(f, \Delta_N, [a,b]),$$

где

$$\Omega_i(f, \Delta_N, [a,b]) = \max_{t_{i-1}\le t\le t_i} f(t) - \min_{t_{i-1}\le t\le t_i} f(t), \qquad i = 1, 2, \dots, N.$$

Очевидно,

$$\Omega_i(f, \Delta_N, [a,b]) \le \omega(f, |\Delta_N|)_{C[a,b]},$$

так что для $f \in C[a,b]$ имеем $\Omega_i(f, \Delta_N, [a,b]) \to 0$ при $|\Delta_N| \to 0$.

Пусть $f \in C[a,b]$. Среди функций множества $S_0(\Delta_N, [a,b])$ наименее уклоняется от $f(t)$ в метрике $L_\infty[a,b]$ функция

$$s(f,t) = \frac{1}{2}[\max_{t_{i-1}\le t\le t_i} f(t) + \min_{t_{i-1}\le t\le t_i} f(t)], \qquad t_{i-1} < t < t_i, \qquad i = 1, 2, \dots, N,$$

при этом

$$\|f - s(f)\|_\infty = \frac{1}{2}\Omega(f, \Delta_N, [a,b]) \le \frac{1}{2}\omega(f, |\Delta_N|)_C.$$

Кроме того, при $p > 0$

$$\int\limits_a^b |f(t) - s(f,t)|^p dt \le 2^{-p} \sum_{i=1}^{N} (t_i - t_{i-1}) \Omega_i^p(f, \Delta_N, [a,b]) \le$$

$$\le 2^{-p}(b-a)\Omega^p(f, \Delta_N, [a,b]).$$

Обозначим через $E_N(f, S_m^r(\Delta_N, [a,b]))$ величину наилучшего приближения функции f сплайнами, принадлежащими множеству $S_m^r(\Delta_N, [a,b])$.

Тогда для $f \in C[a,b]$

$$E_N(f, S_0(\Delta_N, [a,b]))_\infty \le \frac{1}{2}\Omega(f, \Delta_N, [a,b]) \le \frac{1}{2}\omega(f, |\Delta_N|)_C,$$

$$E_N(f, S_0(\Delta_N, [a,b]))_p \le \frac{(b-a)^{1/p}}{2}\Omega(f, \Delta_N, [a,b]) \le \frac{(b-a)^{1/p}}{2}\omega(f, |\Delta_N|)_C.$$

В случае равномерного разбиения отсюда вытекают неравенства

$$E_N(f, S_{N,0}, [a,b])_\infty \le \frac{1}{2}\omega\left(f, \frac{(b-a)}{N}\right)_C,$$

$$E_N(f, S_{N,0}, [a,b])_p \le \frac{(b-a)^{1/p}}{2}\omega\left(f, \frac{(b-a)}{N}\right)_C,$$

неулучшаемые на множестве $C[a,b]$.

Если положить $[a,b]$ равным $[0, 2\pi]$, то все приведенные выше оценки будут справедливы и для периодических с периодом 2π функций из $\tilde{C}[0, 2\pi]$, причем эти оценки неулучшаемы при $N = 2n$. В частности, справедливо точное неравенство

$$E_{2n}(f, S_{2n,0})_p \le \frac{(2\pi)^{1/p}}{2}\omega\left(f, \frac{\pi}{n}\right)_C, \qquad 1 \le p \le \infty.$$

В общем случае справедливо следующее утверждение.

Теорема 3.14 [51]. Если $f \in W^r$ $(r = 0, 1, \ldots)$, то

$$E_{2n}(f, S_{2n,r})_\infty \le \frac{K_r}{2n^r}\Omega(f^{(r)}, \bar{\Delta}_{2n}) \le \frac{K_r}{2n^r}\omega\left(f^{(r)}, \frac{\pi}{n}\right)_C,$$

$$E_{2n}(f, S_{2n,r})_{L_1} \le \frac{2K_{r+1}}{n^r}\Omega(f^{(r)}, \bar{\Delta}_{2n}) \le \frac{2K_{r+1}}{n^r}\omega\left(f^{(r)}, \frac{\pi}{n}\right)_C.$$

Все оценки точные.

Заканчивая этот пункт, остановимся на оценках для интерполяционных сплайнов. Известно [50], [51], что сплайн $\sigma_{2n,m}(f,t) \in S_{2n,m}$, аппроксимирующий функцию $f(t) \in \tilde{C}[0,2\pi]$, имеет узлы в точках $t_i = i\pi/n$ $(i = 0,1,\ldots,2n)$, и нули в точках $\tau_j = j\pi/n + \beta_m$ $(\beta_m = (1 +$
$+(-1)^m)\pi/(4n)), j = 0,1,\ldots,2n-1$.

Теорема 3.15 [51]. При каждом t верны неулучшаемые на множестве W^m $(m = 1,2,\ldots)$ неравенства

$$|f(t) - \sigma_{2n,m}(f,t)| \leq M_{n,m}(t)\Omega(f^{(m)}, \bar{\Delta}_{2n}) \leq M_{n,m}(t)\omega(f^{(m)}, \pi/n),$$

где $M_{n,m}(t) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} |D_m(t-u) - \sigma_{2n,m}(D_m(t-u),t)|du$, а $D_m(t)-$ функция Бернулли.

Напомним определения функций и полиномов Бернулли.

Функциями Бернулли называют 2π периодические функции

$$D_r(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(kx - \pi r/2)}{k^r}, \qquad r = 1,2,\ldots.$$

Из определения функций Бернулли следует, что функции с четными номерами четны, а функции с нечетными номерами $-$ нечетны.

Для $D_1(x)$ известно равенство

$$D_1(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kx}{k} = \begin{cases} (\pi - x)/2, & 0 < x < 2\pi \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Из определения функций Бернулли следует, что $D_2'(x) = D_1(x)$, $0 < x < 2\pi$ и $D_r'(x) = D_{r-1}(x)$, $r = 3,4,\ldots$, при $|x| \leq \infty$.

Следовательно,

$$D_r(x) = \int\limits_{\beta_r}^{x} D_{r-1}(t)dt, \qquad r = 2,3,\ldots,$$

где константа β_r определяется условием

$$\int\limits_0^{2\pi} D_r(t)dt = 0.$$

Из отмеченных выше свойств функции $D_r(x)$ следует, что функции

$$B_r^*(t) = -\frac{r!}{2^{r-1}\pi^r} D_r(2\pi t) \qquad (r = 2,3,4,\ldots, |t| < \infty);$$

$$B_1^*(t) = \begin{cases} -\frac{1}{\pi} D_1(2\pi t), & 0 < t < 1, \\ -\frac{1}{\pi} D_1(0+0) = -\frac{1}{2}, & t = 0; \end{cases}$$

$B_1^*(t+1) = B_1^*(t)$ на промежутке $0 \le t < 1$ являются алгебраическими полиномами степени r с коэффициентом при старшей степени, равным единице:

$$B_1^*(t+1) = B_1^*(t),$$

$$B_r^*(t) = t^r + \sum_{k=0}^{r-1} \alpha_k t^k.$$

Эти полиномы называются полиномами Бернулли.

Теорема 3.16 [51]. Для любой функции $f \in W^r(1)$ $(r = 1, 2, \ldots)$ справедливы соотношения

$$\|f - \sigma_{n,r-1}(f)\|_C \le \|\varphi_{nr}\|_C = \frac{K_r}{n^r} \qquad (n = 1, 2, \ldots),$$

а также

$$\|f - \sigma_{n,r-1}(f)\|_{L_p} \le \|\varphi_{nr}\|_{L_p} \qquad (1 \le p < \infty,\, n = 1, 2, \ldots),$$

$$\|f - \sigma_{n,r-1}(f)\|_L \le \|\varphi_{nr}\|_L = \frac{4K_{r+1}}{n^r} \qquad (n = 1, 2, \ldots),$$

где φ_{nr}– эйлеров сплайн.

3.5. Некоторые факты из теории квадратурных формул

На протяжении всей книги используется ряд известных утверждений из теории квадратурных и кубатурных формул. Для удобства читателя некоторые из них приводятся в этом параграфе.

Пусть на сегменте $[0, 1]$ задана произвольная система узлов $0 \le \le x_0 < x_1 < \cdots < x_{m-1} \le 1$. Зададимся вектором $P = (p_0, p_1, \ldots, p_{m-1})$ коэффициентов и построим линейный функционал

$$L(f) = \sum_{k=0}^{m-1} p_k f(x_k),$$

где $f(x)$– произвольная непрерывная на сегменте $[0, 1]$ функция.

Положим

$$\int_0^1 f(x)dx = L(f) + R(f), \tag{3.2}$$

где $R(f)$– погрешность приближения функционала $\int_0^1 f(x)dx$ функционалом $L(f)$.

Известно [64, с. 45], что если квадратурная формула точна для полиномов до $(r-1)$-й степени включительно, то на классе функций $W^r(M)$ справедливо равенство

$$\int\limits_0^1 f(x)dx - L(f) = \int\limits_0^1 F_r(t)f^{(r)}(t)dt,$$

где

$$F_r(t) = \frac{1}{(r-1)!}\left[\frac{(1-t)^r}{r} - \sum_0^m p_k K_r(x_k - t)\right],$$

а функция $K_r(t)$ определяется формулой

$$K_r(t) = \begin{cases} t^{r-1} & \text{для} \quad t \geq 0, \\ 0 & \text{для} \quad t < 0. \end{cases}$$

Положим

$$c_r = \max_{f \in W^{(r)}(1;0,1)} \left| \int\limits_0^1 f(x)dx - L(f) \right| = \int\limits_0^1 |F_r(t)|dt.$$

Нас будет интересовать соответствие

$$\int\limits_0^1 f(x)dx \approx L(f) \tag{3.3}$$

между этими двумя линейными функционалами.

Рассмотрим произвольный сегмент $[\alpha, \beta]$. Следуя С. М. Никольскому ([64, c.43]), будем называть квадратурную формулу

$$\int\limits_\alpha^\beta f(x)dx \approx L(\alpha, \beta; f), \tag{3.4}$$

где

$$L(\alpha, \beta; f) = \sum_0^{m-1} p_k' f(x_k'),$$

подобной формуле (3.3), а функционал $L(\alpha, \beta; f)$– подобным функционалу $L(f)$, если система точек $\alpha, x_0', x_1', \ldots, x_{m-1}', \beta$ геометрически подобна системе $0, x_0, x_1, \ldots, x_{m-1}, 1$, а веса p_k' относятся соответственно к весам p_k, как длина отрезка $[\alpha, \beta]$ к единице, иначе говоря, если выполняются соотношения

$$x_k' = \alpha + x_k(\beta - \alpha), \quad p_k' = p_k(\beta - \alpha) \quad (k = 0, 1, \cdots, m-1).$$

Рассмотрим интеграл $\int\limits_a^b f(x)dx$ по сегменту $[a,b]$. Разделим сегмент $[a,b]$ точками $\xi_k = a + \frac{b-a}{n}k$, $k = 0,1,\ldots,n$, и поставим интегралу $\int\limits_a^b f(x)dx$ в соответствие функционал $\sum\limits_{k=0}^{n-1} L(\xi_k, \xi_{k+1}; f)$: $\int\limits_a^b f(x)dx \approx \sum\limits_{k=0}^{n-1} L(\xi_k, \xi_{k+1}; f)$.

Теорема 3.17 [64]. Если квадратурная формула (3.2) точна для всех многочленов степени $r-1$, то для любой функции f, принадлежащей к классу $W^{(r)}(M;a,b)$, имеет место неравенство:

$$\left|\int\limits_b^a f(x)dx - \sum_0^{n-1} L(\xi_k, \xi_{k+1}; f)\right| \leq \frac{(b-a)^{r+1}c_r M}{n^r}. \tag{3.5}$$

Существует функция f, зависящая от n, принадлежащая классу $W^r(M;a,b)$, для которой неравенство (3.5) является точным.

В дальнейшем неоднократно понадобится следующее утверждение, приведенное в монографии С. М. Никольского [64, с. 48].

Теорема 3.18. Для любой функции f, принадлежащей классу $W_p^r(M;a,b)$, где $1 < p < \infty$, имеет место неравенство:

$$|\int\limits_a^b f(x)dx - \sum_{k=0}^{n-1} L(\xi_k, \xi_{k+1}, f)| \leq \frac{(b-a)^{r+1-1/p} C_r^{(q)} M}{n^r},$$

$$C_r^{(q)} = (\int\limits_0^1 |F_r(t)|^q dt)^{1/q},$$

точное в том смысле, что существует функция f_*, принадлежащая к указанному классу, для которой это неравенство обращается в равенство.

Там же указывается, что эта теорема распространяется и на квадратурные формулы, использующие значения производных.

Лемма 3.6 [64]. Пусть $\Psi_1 = W_p^r(1)$, $r = 1,2,\ldots$, $1 \leq p \leq \infty$, $0 \leq t \leq 1$, $f(t) \in \Psi_1$, квадратурная формула

$$\int\limits_0^1 f(t)dt = \sum_{k=1}^{n} p_k f(t_k) + R_n(f)$$

точна для полиномов $(r-1)$-го порядка и имеет погрешность $R_n(\Psi_1)$ на классе Ψ_1. Пусть $\Psi_2 = W_p^r(1)$, $r = 1,2,\ldots$, $1 \leq p \leq \infty$,

$a \le t \le b$ и $g(t) \in W_p^r(1)$. Тогда квадратурная формула

$$\int\limits_a^b g(t)dt = (b-a)\sum_{k=1}^n p_k g(a+(b-a)t_k) + R_n(g)$$

имеет погрешность $R_n(\Psi_2)$ на классе Ψ_2 и $R_n(\Psi_2) = (b - a)^{r+1-1/p} R_n(\Psi_1)$.

Теорема 3.19 [64]. Среди квадратурных формул вида

$$\int\limits_0^1 f(x)dx = \sum_{k=1}^m \sum_{l=0}^\rho p_{kl} f^{(l)}(x_k) + R(f) \equiv L(f) + R(f)$$

наилучшей для класса $W^r L_p(1) \quad (1 \le p \le \infty)$ при $\rho = r-1$ $(r = 1,2,3,\ldots)$, а также при $\rho = r-2 (r = 2,4,6,\ldots)$ является единственная формула, определяемая следующими узлами x_k^* и коэффициентами p_{kl}^* :

$$x_k^* = h(2(k-1) + [R_{rq}(1)]^{1/r})\,(k = 1,2,\ldots,m),$$

$$p_{1l}^* = (-1)^l p_{ml}^* =$$

$$= h^{l+1}\left\{\frac{(-1)^l}{(l+1)!}[R_{rq}(1)]^{(l+1)/r} + \frac{1}{r!}R_{rq}^{(r-l-1)}(1)\right\}\,(l = 0,1,\ldots,\rho),$$

$$p_{k,2\nu}^* = \frac{2h^{2\nu+1}}{r!}R_{rq}^{(r-2\nu-1)}(1)$$

$$\left(k = 2,3,\ldots,m-1;\, \nu = 0,1,\ldots,\left[\frac{r-1}{2}\right]\right),$$

$$p_{k,2\nu+1}^* = 0 \quad \left(k = 2,3,\ldots,m-1;\, \nu = 0,1,\ldots,\left[\frac{r-2}{2}\right]\right),$$

где $h = 2^{-1}(m-1+[R_{rq}(1)]^{1/r})^{-1}$, а $R_{rq}(t)-$ многочлен вида $t^r + \sum_{i=0}^{r-1}\beta_i t^i$, наименее уклоняющийся от нуля в метрике L_q $(p^{-1} + q^{-1} = 1)$ на $[-1,1]$. При этом

$$R_m[W^r L_p(1)] = R_m[W^r L_p(1); X^*, P^*] =$$

$$= \frac{R_{rq}(1)h^r}{r!\sqrt[q]{rq+1}} = \frac{R_{rq}(1)}{2^r r!\sqrt[q]{rq+1}(m-1+[R_{rq}(1)]^{1/r})^r}.$$

Отметим частные случаи. Если $p = 1 (q = \infty)$, то многочлен $R_{r\infty}(t)$ есть многочлен Чебышева $T_r(t) = 2^{1-r}\cos(r\arccos t)$ и тогда

$$h = \frac{1}{2^{1/r} + 2(m-1)}, \quad R_m[W^r L(1)] = \frac{1}{r![2+(m-1)2^{2-1/r}]^r}.$$

Если $p = q = 2$, то $R_{r2}(t)$ есть многочлен Лежандра $L_r(t)$; при этом

$$h = \left[4\sqrt[r]{\frac{(r!)^2}{(2r)!}} + 2(m-1)\right]^{-1},$$

$$R_m[W^r L_2(1)] = \frac{2}{r!\sqrt{2r+1}}\left[2+(m-1)\sqrt[r]{\frac{(2r)!}{(r!)^2}}\right]^{-r}.$$

Наконец, в случае $p = \infty$ $(q = 1)$ $R_{r1}(t)$ есть многочлен Чебышева $Q_r(t)$ (второго рода) и тогда

$$h = [2(m-1) + \sqrt[r]{r+1}]^{-1},$$

$$R_m[W^r L_\infty(1)] = \frac{1}{r![4(m-1)+2\sqrt[r]{r+1}]^r}.$$

Приведенные равенства справедливы для всех $r = 1, 2, 3, \ldots$, если $\rho = r-1$, и для $r = 2, 4, 6, \ldots$, если $\rho = r-2$.

В книге будут неоднократно использоваться следующие результаты, принадлежащие В. П. Моторному.

Теорема 3.20 [61]. Пусть при $r = 1, 2, \ldots, M_m^r$ есть множество функций $f \in \tilde{W}^r(0, 2\pi)$, имеющих $2m$ экстремумов на периоде $[0, 2\pi)$, производная которых $f^{(r)}(x)$ меняет знак на периоде $2m$ раз, принимая попеременно значения $+1$ или -1. Тогда для любой системы точек $X = \{0 = x_0 < x_1 < \ldots < x_{m-1} < 2\pi\}$ существует функция $f_X \in M_m^r$, такая, что

$$\min_t f_X(t) = f(x_k) = 0 \qquad (k = 0, 1, \ldots, m-1)$$

и

$$\int_0^{2\pi} f_X(t)dt \geq \frac{2\pi K_r}{m^r},$$

где K_r– константа Фавара.

Следствие [61]. Справедливо неравенство

$$\inf_X \sup_{f\in\tilde{W}_X^r(0,2\pi)} \int_0^{2\pi} f_X(t)dt \geq \frac{2\pi K_r}{m^r},$$

где $\tilde{W}^r_X(0,2\pi)-$ множество функций, определенных на сегменте $[0,2\pi]$, принадлежащих классу $\tilde{W}^r(1)$ и равных нулю на сетке X.

Теорема 3.21 [64]. Для класса $\tilde{W}^r(1)$ функций, определенных на сегменте $[0,2\pi]$ при любых натуральных r наилучшей квадратурной формулой вида

$$\int\limits_0^{2\pi} f(t)dt = \sum_{k=0}^{m-1} p_k f(x_k) + R(f)$$

или

$$\int\limits_0^{2\pi} f(t)dt = \sum_{k=0}^{m-1} [p_k f(x_k) + p'_k f'(x_k)] + R(f)$$

на произвольном векторе узлов $X = (x_0, x_1, \ldots, x_{m-1}), 0 \le x_0 <$ $x_1 <$
$< \ldots < x_{m-1} \le 2\pi$ для обеих квадратурных формул и произвольном векторе коэффициентов $P = \{p_k\}$ для первой квадратурной формулы или произвольном векторе коэффициентов $P = \{p_k\} \cup \{p'_k\}$ для второй квадратурной формулы, является формула

$$\int\limits_0^{2\pi} f(t)dt = \frac{2\pi}{m} \sum_{k=0}^{m-1} f\left(\frac{2k\pi}{m}\right) + R(f)$$

с равноотстоящими узлами и равными коэффициентами. Погрешность этой формулы равна

$$\sup_{f\in\tilde{W}^r(1)} |R(f)| = \frac{2\pi K_r}{m^r}.$$

Также неоднократно будут использоваться следующие квадратурные формулы.

Теорема 3.22 [64]. Среди квадратурных формул вида

$$\int\limits_0^1 f(x)dx = \sum_{k=1}^{m} p_k f(x_k) + R(f)$$

наилучшей для класса $\tilde{W}^r L_p(1) \quad (1 \le p \le \infty)$ является формула прямоугольников

$$\int\limits_0^1 f(x)dx = \frac{1}{m} \sum_{k=1}^{m} f\left(\frac{k}{m}\right) + R(f);$$

при этом

$$R_m[\tilde W^r L_p(1)] = \frac{1}{m^r} \inf_c \|B_r^*(\cdot) - c\|_{L_q}, \quad (1/p + 1/q = 1).$$

Для $1 < p \le \infty$ наилучшая формула единственная с точностью до жесткого сдвига.

Теорема 3.23 [64]. Среди квадратурных формул вида

$$\int_0^1 f(x)dx = \sum_{k=1}^m \sum_{l=0}^{\rho} p_{kl} f^{(l)}(x_k) + R(f) \equiv L(f) + R(f)$$

наилучшей на классе $\tilde W^r L_p(1)$ $(1 \le p \le \infty)$ при $\rho = r-1$ $(r = 1, 2, \dots)$ и $\rho = r-2$ $(r = 2, 4, 6, \dots)$ является формула

$$\int_0^1 f(x)dx = \frac{2}{r!} \sum_{k=1}^m \sum_{l=0}^{[\rho/2]} \frac{R_{rq}^{(r-2l-1)}(1)}{(2m)^{2l+1}} f^{(2l)}\left(\frac{k-1}{m}\right) + R_m^{\rho}(f),$$

где $R_{rq}(t)-$ многочлен вида $t^r + \sum\limits_{l=0}^{r-1} \beta_l t^l$, наименее уклоняющийся от нуля в метрике $L_q (1/p + 1/q = 1)$ на сегменте $[-1, 1]$. При этом

$$R_m^{\rho}[\tilde W^r L_p(1)] = \frac{R_{rq}(1)}{r! \sqrt[q]{rq+1}(2m)^r}.$$

Рассмотрим множество квадратурных формул типа Эйлера – Маклорена

$$\int_0^1 f(x)dx = a_0 f(0) + \sum_{k=1}^m p_k f(x_k) + b_0 f(1) +$$

$$+ \sum_{v=1}^{r-1} a_v [f^{(v)}(1) - f^{(v)}(0)] + R_m(f).$$

В работе [95] доказано, что среди всевозможных формул типа Эйлера – Маклорена точных для полиномов $(r-1)$-й степени наилучшей на классе $W_p^r(1)$ является формула с коэффициентами и узлами $a_0 =$
$= b_0 = 1/2(m+1)$, $p_k = 1/(m+1)$, $x_k = k/(m+1)$ $(k = 1, 2, \dots, m)$, $a_v = \frac{1}{(m+1)^{v+1}} B_{v+1}^*(1)$ $(v = 1, 2, \dots, r-2)$, $a_{r-1} = \frac{1}{(m+1)^r}[B_r^*(1) - \gamma_{rq}]$, где $\gamma_{rq}-$ константа наилучшего приближения функции $B_r^*(t)$ в метрике L_q. Погрешность оптимальной формулы Эйлера – Маклорена на классе $W_p^r(1)$ равна $R_m[W_p^r(1)] =$

$\frac{1}{m^r}\inf_c \|B_r^*(t)-c\|_{L_q}$, $\quad 1/p+1/q=1$, где $B_r^*(t)-$ полином Бернулли.

Пусть функция $f(x,y)$ задана на прямоугольнике $D=[a,b;c,d]$. Рассмотрим кубатурную формулу

$$\int\int_D f(x,y)dxdy=\sum_{k=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} p_{ki}f(x_k,y_i)+R_{mn}(f), \qquad (3.6)$$

определяемую вектором (X,Y,P) узлов $a\le x_1<x_2<\cdots<x_m\le b$, $c\le y_1<y_2<\cdots<y_n\le d$ и коэффициентов p_{ki}.

Теорема 3.24 [49]. Среди квадратурных формул (3.6) оптимальной для классов $H_{\omega_1,\omega_2}(D)$ и $H_\omega(D)$ является формула

$$\int\int_D f(x,y)dxdy=4hq\sum_{k=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} f(a+(2k-1)h,c+(2i-1)q)+R_{mn}(f),$$

где $h=\frac{b-a}{2m}$, $q=\frac{d-c}{2n}$. При этом

$$R_{mn}[H_{\omega_1,\omega_2}(D)]=4mn[q\int_0^h\omega_1(t)dt+h\int_0^q\omega_2(t)dt];$$

$$R_{mn}[H_\omega(D)]=4mn\int_0^q\int_0^h\omega(\sqrt{t^2+\tau^2})dtd\tau.$$

Рассмотрим кубатурные формулы вида

$$\int\int_D \rho(x,y)f(x,y)dxdy=\sum_{k=1}^{N}p_kf(M_k)+R(f), \qquad (3.7)$$

где $\rho(x,y)-$ неотрицательная и ограниченная на D функция; p_k и $M_k (M_k\in D)-$ коэффициенты и узлы.

Теорема 3.25 [8],[9]. Пусть $\rho(x,y)-$ ограниченная неотрицательная весовая функция. Если $R_N[H^\alpha_{\rho,j}(D)]$, $j=1,2,3$, $0<\alpha\le 1,-$ погрешность оптимальной для класса $H^\alpha_{\rho,j}(D)$ формулы вида (3.7), то

$$\lim_{N\to\infty}N^{\alpha/2}R_N[H^\alpha_{\rho,j}(D)]=D_j\left[\int\int_D(\rho(x,y))^{2/(2+\alpha)}dxdy\right]^{(2+\alpha)/\alpha}, \quad j=1,2,3,$$

где $D_1=\frac{12}{2+\alpha}\left(\frac{1}{2\sqrt{3}}\right)^{(2+\alpha)/\alpha}\int\limits_0^{\pi/6}\frac{d\varphi}{\cos^{2+\alpha}\varphi}$, $D_2=\frac{2^{1-\alpha}}{2+\alpha}$, $D_3=\frac{2^{1-\alpha/2}}{2+\alpha}$.

Случай $j = 2$ распространяется на n-мерные кубатурные формулы.

Обозначим через $l_{n,r,p}(\varphi; [a, b])$ квадратурную формулу с пограничным слоем вида $l_{n,r,p}(\varphi; [a, b]) = \sum\limits_{k=1}^{n} p_k \varphi(t_k)$, которая асимптотически наилучшим образом аппроксимирует интеграл $\int\limits_a^b \varphi(t)dt$ от функции $\varphi(t) \in W_p^r(1)$, $1 < p \le \infty$, $r = 1, 2, \ldots$. Квадратурные формулы такого вида исследовались В. И. Половинкиным [67] – [71].

Через $\Pi_{n,r,p}(\varphi^{(l)}(t_j))$ обозначим разностный оператор, который аппроксимирует значения $\varphi^{(l)}(t_j)$ по $(r+1)$-му значению функции $\varphi(t)$ с точностью $An^{-2(r-l)}$, $l = 0, 1, \ldots, r-1$, причем аппроксимация точна для полиномов степени $r - 1$. Операторы вида $\Pi_{n,r,p}$ были построены В. И. Половинкиным в [67] – [71].

Обозначим через

$$l_{n_1,n_2}^{r,s}(\varphi; [a, b; c, d]) = \sum_{k_1=1}^{n_1} \sum_{k_2=1}^{n_2} p_{k_1 k_2} \varphi(t_{k_1,k_2})$$

асимптотически оптимальную на классе $W^{r,s}(1)$ кубатурную формулу (куб.ф.), а через $\Pi_{m,n}^{r,s}(\varphi^{(k,l)}(t_i, t_j))$– функционал, аппроксимирующий $\varphi^{(k,l)}(t_i, t_j)$ с точностью $Am^{-2(r-k)}n^{-2(s-l)}$ и точный для полиномов $t_1^v t_2^w$, $v = 0, 1, \ldots, r-1$, $w = 0, 1, \ldots, s-1$. Функционалы $l_{n_1,n_2}^{r,s}$ и $\Pi_{m,n}^{r,s}$ исследованы В. И. Половинкиным. Построим функционалы $l_{n,r,p}(\varphi; [a, b])$ и $\Pi_{n,r,p}$ способом, отличным от использованного в [67] – [71].

Остановимся вначале на построении функционала $l_{n,r,p}(\varphi; [a, b])$. Выше было отмечено, что наилучшая на классе $W^r L_p(1)$ квадратурная формула типа Эйлера – Маклорена

$$\int\limits_0^1 f(x)dx = a_0 f(0) + \sum_{k=1}^{m} p_k f(x_k) + b_0 f(1) + \sum_{v=1}^{r-1} s_v \left[f^{(v)}(1) - f^{(v)}(0)\right] + R(f)$$

определяется коэффициентами и узлами $a_0 = b_0 = 1/2(m+1)$, $p_k = 1/(m+1)$, $x_k = k/(m+1)$ $(k = 1, 2, \ldots, m)$, $s_v = \frac{1}{(m+1)^{v+1}} B_{v+1}^*(1)$ $(v = 1, 2, \ldots, r-2)$, $s_{r-1} = \frac{1}{(m+1)^r}[B_r^*(1) - \gamma_{rq}]$. Здесь γ_{rq}– константа наилучшего приближения полинома $B_r^*(t)$ в метрике L_q.

Аппроксимируя производные $f^{(v)}(0)$ и $f^{(v)}(1)$ функционалами $\Pi_{n,r,p}(f^{(v)}(0))$ и $\Pi_{n,r,p}(f^{(v)}(1))$ с достаточно малым носителем h, получаем функционал $l_{n,r,p}(\varphi;[0,1])$ вида

$$l_{n,r,p}(f;[0,1]) = a_0 f(0) + \sum_{k=1}^{m} p_k f(x_k) + b_0 f(1) +$$

$$+ \sum_{v=1}^{r-1} s_v \left[\Pi_{n,r,p} f^{(v)}(1) - \Pi_{n,r,p} f^{(v)}(0)\right] + R_m(f).$$

Погрешность

$R_m(f) = R(f) + \sum_{v=1}^{r-1} |s_v \left(\Pi_{n,r,p} f^{(v)}(1) - f^{(v)}(1) + \Pi_{n,r,p} f^{(v)}(0) - f^{(v)}(0)\right)|$.

Так как $R(f) = \frac{1}{m^r} \inf_c \|B_r^*(\cdot) - C\|_{L_q}$, $\quad s_v = 0\left(\frac{1}{m^{v+1}}\right)$ и, как показано ниже, $|\Pi_{n,r,p} f^{(v)}(k) - f^{(v)}(k)| = 0(h^{r-v})$, $\quad k = 0, 1$, то

$$R_m(f) = \frac{1 + o(1)}{m^r} \inf_c \|B_r^*(\cdot) - c\|_{L_q}.$$

Построим функционал $\Pi_{n,r,p}$. Функцию $f(x)$, определенную на сегменте $[0, h]$, аппроксимируем интерполяционным полиномом $L_r(f)$, использующим $(r+1)$-н узлов, расположенных на сегменте $[0, h]$. Такая аппроксимация будет точной для полиномов степени r. Одна из простейших оценок погрешности аппроксимации функции $f(x) \in W^r(1)$ полиномом $L_r(f)$ имеет вид $|f(x) - L_r(f)| \le 6^r h^r \ln r/(r+1)^r$ в случае, если интерполяция проводится по узлам Чебышева. Положим $\Pi_{n,r,p}(f) = L_r(f)$.

Погрешность аппроксимации функции $f(x)$ полиномами T_n наилучшего равномерного приближения степени n равна $E_n = 6^r h^r / n^r$.

Представим, следуя [62], функцию $f(x) - L_r(f)$ в виде:

$$f(x) - L_r(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (T_{2^{k+1} r} - T_{2^k r}) + T_r - L_r.$$

Тогда, воспользовавшись вторым неравенством Бернштейна, на сегменте $[h/4, 3h/4]$ имеем (при $0 \le v < r$):

$$|f^{(v)}(x) - L_r^{(v)}(x)| \le 4^v 6^r h^{r-v} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(2^{k+1} r)^v}{(2^k r)^r} + \frac{\ln r}{(r+1)^{r-v}} + \frac{1}{(r+1)^{r-v}}\right) =$$

$$= 0(h^{r-v}).$$

Из этой оценки следует, что при $a \in [h/4, 3h/4]$

$|f^{(v)}(a) - \Pi_{n,r,p} f^{(v)}(a)| \le A(h^{r-v})$, где $h-$ носитель функционала $\Pi_{n,r,p}$.

Оценим теперь величину $f^{(v)}(x) - L_r^{(v)}(x)$ на концах сегмента [0,1]. При этом ограничимся левым концом. Так как

$$|f^{(v)}(x) - L_r^{(v)}(x)|_{x=0} = \sum_{k=0}^{\infty} |T^{(v)}_{2^{k+1}r}(x) - T^{(v)}_{2^k r}(x)|_{x=0} +$$

$$+|T_r^{(v)}(x) - L_r^{(v)}(x)|_{x=0}, \tag{3.8}$$

каждое слагаемое $|T^{(v)}_{2^{k+1}r}(x) - T^{(v)}_{2^k r}(x)|$ оценим на сегменте $[0, h_k]$, $h_k =$
$= h/(2^{k+1}r)^{2r-1}$. Пользуясь неравенством А. А. Маркова, имеем на сегменте $[0, h_k]$:

$$|T^{(v)}_{2^{k+1}r}(x) - T^{(v)}_{2^k r}(x)| \leq \frac{A(2^k r)^{2v}}{h_k^v} h_k^r \frac{1}{(2^k r)^r} \leq \frac{Ah^{r-v}}{(2^k r)^{r+2}}.$$

Из (3.8) следует, что $|f^{(v)}(x) - L_r^{(v)}(x)|_{x=0} \leq Ah^{r-v}$.

Оператор $\Pi_{n,r,p}$ построен.

Пусть $f-$ элемент метрического пространства X; $L, L_1, \ldots, L_N-$ линейные функционалы. Информация о функции f задается вектором $T(f) = (L_1(f), \ldots, L_N(f))$. Через $S(T(f))$ обозначен метод S вычисления функционала $L(f)$ по информации $T(f)$. Погрешность этого метода на множестве функций Ω равна $R(S,T) = \sup_{f\in\Omega} |L(f) - S(T(f))|$. Через $R(T) = \inf_s R(S,T)$ обозначен наилучший для данной информации T метод.

Лемма 3.7 (С. А. Смоляка) [74], [14]. Пусть функционалы $L(f)$, $L_1(f), \ldots, L_N(f)-$ линейные и $\Omega-$ выпуклое центрально-симметричное множество с центром симметрии Q в линейном метрическом пространстве. Пусть $\sup_{f\in\Omega_0} L(f) < \infty$, где $\Omega_0 \equiv \{f; \quad f \in \Omega, \quad L_k(f) =$
$= 0, \quad k = 1, 2, ..., N\}$. Тогда существуют числа $D_1, \ldots, D_N$, такие, что

$$\sup_{f\in\Omega} |L(f) - \sum_{k=1}^{N} D_k L_k(f)| = R(T),$$

т. е. среди наилучших методов есть линейный.

Следствие. $R(T) = \sup_{f\in\Omega_0} Lf$.

4. Элементы функционального анализа

В этом разделе приводится несколько разрозненных фактов из функционального анализа, которые используются на протяжении работы.

Теорема 4.1. Пусть $X-$ нормированное пространство и X_0- конечномерное линейное множество в X. Каков бы ни был элемент $x \in X$, в X_0 найдется элемент x_0, реализующий расстояние от x до X_0, т. е. такой, что $\|x - x_0\| = \rho(x, X_0)$.

Множество X называется топологическим пространством, если в нем выделена система $\sum$ подмножеств, называемых покрытиями, которая удовлетворяет следующим трем условиям (аксиомам топологического пространства):

1) пустое множество $\emptyset$ и все множество X входят в $\sum$;

2) объединение любого числа открытых множеств $-$ открыто;

3) пересечение конечного числа открытых множеств $-$ открыто.

Топологическое пространство X называется хаусдорфовым (или отделимым), если для любых двух различных элементов x_1 и x_2, принадлежащих X, найдутся окрестность U_1 элемента x_1 и окрестность U_2 элемента x_2, такие, что $U_1 \cap U_2 = \emptyset$.

Множество K, расположенное в метрическом пространстве X, называется компактным, если всякая бесконечная последовательность элементов этого множества содержит сходящуюся подпоследовательность. Если пределы этих последовательностей принадлежат K, то оно называется компактным в себе, если пределы этих последовательностей принадлежат пространству X, то говорят, что множество K компактно относительно пространства X.

Определение 4.1. Множество N метрического пространства X называется ε-сетью для множества M того же пространства, если для любой точки $x \in M$ найдется точка $x_\varepsilon \in M$, такая, что $\rho(x, x_\varepsilon) < \varepsilon$.

Теорема 4.2 (Хаусдорфа). Для компактности множества Ψ метрического пространства E необходимо, а в случае полноты E и достаточно, чтобы для любого числа $\varepsilon > 0$ существовала конечная ε-сеть для множества Ψ.

Глава 2

ОПТИМАЛЬНЫЕ МЕТОДЫ ВОССТАНОВЛЕНИЯ ФУНКЦИЙ СО СТЕПЕННЫМ РОСТОМ ПРОИЗВОДНЫХ У ГРАНИЦЫ ОБЛАСТИ

1. Определение поперечников и их основные свойства

Приближение класса функций Ψ конкретным способом аппроксимации (полиномами, тригонометрическими полиномами, сплайнами, вейвлетами и т. д.) не дает решения проблемы наилучшего приближения класса функций Ψ n-мерным аппаратом приближения. Естественно, возникает задача построения для каждого класса функций Ψ наилучшего способа аппроксимации. Эта задача связана с вычислением поперечников классов функций. Определение поперечника класса функций Ψ в банаховом пространстве B было введено А. Н. Колмогоровым в работе [97].

Для того чтобы ввести понятие поперечника, нам понадобится следующее определение.

Пусть $B-$ банахово пространство, A и $A'-$ два множества в пространстве B. Отклонением элемента $x \in B$ от множества A' называется величина

$$d(x, A', B) = \inf_{y \in A'} \|x - y\|.$$

Отклонением множества $A \in B$ от множества $A' \in B$ называется величина

$$d(A, A', B) = \sup_{x \in A} d(x, A', B).$$

Данное определение можно записать в виде

$$d(A, A', B) = E_{A'}(A) = \sup_{x \in A} \inf_{y \in A'} \|x - y\|.$$

Обозначение $E_{A'}(A)$ используется, когда из контекста ясно, в каком банаховом пространстве B рассматривается отклонение множества A от множества A'.

Пусть $B-$ банахово пространство, $X \subset B$, L^n- множество n-мерных линейных подпространств пространства B. Пусть $X_n \subset L^n$, т. е. некоторое n-мерное линейное подпространство пространства B. Пусть $\{\varphi_k\}$, $k = 1, 2, \dots, n-$ базис подпространства X_n. Тогда $E_{X_n}(X)-$ точность аппроксимации X линейными комбинациями вида $\sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k \varphi_k$, где α_k- вещественные или комплексные числа в зависимости от вида пространства B. Нижняя грань чисел

$E_{X_n}(X)$, когда X_n пробегает все множества L^n n-мерных линейных подпространств пространства B и определяет поперечник Колмогорова

$$d_n(X,B) = \inf_{X_n \in L^n} E_{X_n}(X).$$

Сказанное выше можно подытожить в виде следующего определения.

Пусть $B-$ банахово пространство, $X \subset B-$ компакт, $\Pi : X \to \bar{X}-$ представление компакта $X \subset B$ конечномерным пространством $\bar{X}$.

Определение 1.1 [82]. Пусть L^n- множество n-мерных линейных подпространств пространства B. Выражение

$$d_n(X,B) = \inf_{L^n} \sup_{x \in X} \inf_{u \in L^n} \|x-u\|,$$

где последний inf берется по всем подпространствам L^n размерности n, определяет n-поперечник Колмогорова.

Наряду с определением поперечника Колмогорова на протяжении работы будут неоднократно использоваться линейный поперечник Колмогорова и поперечник Бабенко.

Определение 1.2. [82]. Пусть $\chi-$ множество всех n-мерных линейных подпространств пространства $B, \mathrm{Map}(\mathrm{X},\chi)-$ совокупность всех непрерывных отображений вида $\Pi : X \to \bar{X}$, где $\bar{X} \in \chi$. Выражение

$$d'_n(X,B) = \inf_{(L^n,\Pi)} \sup_{x \in X} \|x - \Pi(x)\|,$$

где inf берется по всевозможным парам (L^n, Π), состоящим из n-мерного линейного пространства $L^n \subset B$ и непрерывного отображения $\Pi : X \to L^n$, определяет линейный n-поперечник Колмогорова.

Определение 1.3. [82]. Пусть $\chi \in R^n$. Выражение

$$\delta_n(X) = \inf_{(\Pi : X \to R^n)} \sup_{x \in X} \mathrm{diam}\Pi^{-1}\Pi(\mathrm{x}),$$

где inf берется по всем непрерывным отображениям $\Pi : X \to R^n$, определяет n-поперечник Бабенко.

Исторически первый поперечник был введен П. С. Урысоном [90] в 1923 г. при исследовании фундаментальных задач теории размерности.

Пусть $A_{n+1} = \{\alpha_{n+1}^{(\lambda)}\}-$ совокупность всех конечных замкнутых покрытий компакта X, имеющих кратность, не превышающую $n+1$. Напомним, что, по определению, кратность покрытия не превышает k, если пересечение любых различных $k+1$ его элементов пусто.

Определение 1.4. Урысоновский поперечник $U_n(X)$ определяется равенством

$$U_n(X) = \inf_{\alpha_{n+1}^{(\lambda)} \in A_{n+1}} \operatorname{diam}(\alpha_{n+1}^{(\lambda)}),$$

где

$$\operatorname{diam}(\alpha_{n+1}^{(\lambda)}) = \sup_{F \in \alpha_{n+1}^{\lambda}} \operatorname{diam}(F).$$

Размерность компакта X, следуя определению Урысона, определяется равенством

$$\dim(X) = \min\{n : U_n(X) = 0\}.$$

Напомним, что для всякого множества A, принадлежащего нормированному пространству E :

$$\operatorname{diam}(A) = \sup_{a_1, a_2 \in A} \|a_1 - a_2\|_E.$$

Позднее, в 1933 г. П. С. Александровым были введены поперечники Александрова $-$ Урысона $\alpha_n(X)$ и Александрова $\tilde{\alpha}_n(X, B)$.

Прежде чем привести определение этих поперечников, напомним, следуя [60], определение полиэдра.

Определение 1.5. Полиэдром P^n называется объединение локально конечного семейства выпуклых многогранников в n-мерном пространстве R_n. Здесь под выпуклым многогранником понимается пересечение конечного числа замкнутых полупространств в случае, если это пересечение ограничено, а локальная конечность семейства означает, что каждая точка R_n имеет окрестность, пересекающуюся лишь с конечным числом многогранников.

Определение 1.6. Пусть $X-$ компакт. Пусть $\{\xi\}-$ класс всех полиэдров размерности не выше n и $\{\Pi\} = \mathrm{Map}(X, \xi)$. Тогда n-поперечник Александрова $-$ Урысона определяется формулой

$$\alpha_n(X) = \inf_{(P^n, \Pi)} \sup_{x \in X} \operatorname{diam} \Pi^{-1}\Pi(x),$$

где inf берется по всевозможным парам (P^n, Π), состоящим из полиэдра P^n размерности не выше n и непрерывного отображения $\Pi : X \to P$.

Определение 1.7. Пусть $B-$ банахово пространство, $X-$ компакт. Пусть $\xi-$ класс всех лежащих в B полиэдров размерности не выше n и $\Pi = \mathrm{Map}(\mathrm{X}, \xi)$. Александровский n-поперечник $\tilde{\alpha}_n(X, B)$ определяется формулой

$$\tilde{\alpha}_n(X, B) = \inf_{(P^n, \Pi)} \sup_{x \in X} \|x - \Pi(x)\|,$$

где inf берется по всевозможным парам (P^n, Π), состоящим из лежащего в B полиэдра P^n, размерности не превосходящего n и непрерывного отображения $\Pi : X \to P^n$.

Результаты, связывающие теорию размерности и поперечники, изложены в книге П. С. Александрова, Б. А. Пасынкова [3].

В общей теории оптимальных алгоритмов [89] широкое применение получили поперечники Гельфанда.

Предварительно напомним определение коразмерности линейного подпространства A нормированного пространства E.

Пусть $A-$ линейное подпространство в нормированном пространстве E. Тогда в E существует подпространство $A^{\perp}$ (возможно не единственное) такое, что $E = A \oplus A^{\perp}$. При этом подпространство $A^{\perp}$ изоморфно фактор-пространству E/A. Подпространство $A^{\perp}$ называется алгебраическим дополнением подпространства A.

Определение 1.8. Коразмерностью подпространства A называется величина

$$\operatorname{codim} A = \dim A^{\perp} = \dim E/A.$$

Определение 1.9 [89]. Пусть $X-$ выпуклое, центрально-симмет-
ричное подмножество в нормированном пространстве E. Величина

$$d^n(X, E) = \inf_{A^n} \sup_{x \in X \cap A^n} \|x\|,$$

где A^n- подпространство в E с $\operatorname{codim}(A^n) \leq n$, называется n-поперечником множества X по Гельфанду.

В приложениях часто бывает полезной следующая модификация поперечника Гельфанда.

Определение 1.10 [82]. Пусть $\xi = \{R^n\}$, а класс операторов Π задается как совокупность сужений на X всевозможных линейных отображений $l : B \to R^n$. Тогда n-поперечник по Гельфанду определяется выражением

$$\gamma_n(X, B) = \inf_{(l:B\to R^n)} \sup_{x \in X} \operatorname{diam} l^{-1}l(x),$$

где inf берется по всевозможным отображениям $l : X \to R^n$, являющимся сужением на X линейных отображений $l : B \to R^n$.

Из определений 1.3 и 1.10 следует [82], что

$$\gamma_n(X, B) \geq \delta_n(X). \tag{1.1}$$

В работе [80] В. Н. Темляков ввел понятие Фурье-n-поперечника.

Пусть E— нормированное пространство с единичным шаром U, Ψ— некоторое выпуклое, центрально-симметричное подмножество E. Пусть существует гильбертово пространство H, всюду плотное в E и $\Psi \in H$.

Определение 1.11. Фурье-n-поперечником множества Ψ называется величина

$$\varphi_n(\Psi, E) = \inf_{L_n \in \mathrm{Lin_n(H)}} \sup_{x \in \Psi} \|x - \mathrm{Pr} L_n x\|,$$

где $\mathrm{Pr} L_n x$— ортогональная проекция элемента x на подпространство L_n, а inf берется по всем подпространствам H размерности не выше n.

В книге [82] исследована связь между поперечниками Александрова, Александрова – Урысона, Бабенко, Гельфанда, Колмогорова и Урысона, которую можно сформулировать в виде следующего утверждения.

Теорема 1.1 [82]. Пусть B— банахово пространство, X— компакт в B. Справедливы следующие соотношения между поперечниками:

$$\tilde{\alpha}_n(X, B) \le \alpha_n(X) \le 2\tilde{\alpha}_n(X, B) \le 2d_n(X, B);$$

$$\delta_{2n+1}(X) \le U_n(X) = \alpha_n(X),$$

$$\delta_n(X) \le 2d_n(X, B).$$

Основное внимание в нашей работе уделяется поперечникам Колмогорова и Бабенко.

Как уже отмечалось выше, поперечник Колмогорова был введен в работе [97]. В ней же было вычислено точное значение поперечника $d_n(X, B)$, где $B = L_2([-\pi, \pi])$, $X = \tilde{W}^r L_2(1)$.

С. Б. Стечкиным [78] были оценены поперечники класса $W_1^r(1)$ в L_2 и класса $W_\infty^r(1)$ в L_∞. В. М. Тихомиров [84] вычислил точные значения поперечников Колмогорова на классе $W^r(1)$. Поперечники $d_n(W_p^r(1), L_q)$ при различных значениях p и q вычислены В. М. Тихомировым [84], [85], Ю. И. Маковозом [59], Р. С. Исмагиловым [41], [42], Е. Д. Глускиным [35]. Окончательно результаты по вычислению поперечников Колмогорова $d_n(W_p^r(1), L_q)$ получены Б. С. Кашиным [43] и В. Е. Майоровым [58]. Исследованию поперечников на классах функций многих переменных посвящены работы К. И. Бабенко [10] и

В. Н. Темлякова [80], [81]. Подробные обзоры результатов по вычислению поперечников на различных классах функций содержатся в работах [11], [12], [22], [41], [50], [51], [81], [87], [89], [99].

В работе К. И. Бабенко [11] поставлена задача вычисления поперечников на классе функций $Q_r(\Omega, M)$. Эта задача решена в статье автора [19]. Исследования по вычислению поперечников классов функций с неограниченным ростом модулей производных в окрестности границы области определения Ω приведены в [22], [24], [25].

Остановимся на некоторых общих свойствах поперечников Колмогорова.

Из определения 1.1 следует очевидное утверждение: если X является n-мерным подпространством пространства B, то $d_n(X, B) = 0$.

Также совершенно очевидно, что если компакт X вложен в компакт Y $(X \subset Y)$, то $d_n(X, B) \le d_n(Y, B)$.

Легко видеть, что

$$d_0(X, B) \ge d_1(X, B) \ge \cdots \ge d_n(x, B) \ge \cdots.$$

Докажем следующее важное утверждение.

Лемма 1.1 [99]. Пусть $B-$ банахово пространство. Если $X \subset B-$ компакт, то $d_n(X, B) \to 0$ при $n \to \infty$.

Доказательство. Из теоремы Хаусдорфа, приведенной в разделе 4 главы 1 следует, что при любом ε $(\varepsilon > 0)$ существует конечная

ε-сеть для компакта X. Пусть эта сеть состоит из n элементов. Тогда размерность подпространства $Y \subset B$, образованного линейной оболочкой, составленной из элементов ε-сети, имеет размерность $m \le n$.

Следовательно,

$$d_n(X, B) \le E_Y(X) \le \varepsilon.$$

Таким образом, для любого ε $(\varepsilon > 0)$ существует такой номер n $(n(\varepsilon))$, что $d_n(X, B) \le \varepsilon$.

Лемма доказана.

Оценки поперечников для многих классов функций основаны на следующем утверждении.

Теорема 1.2 [99]. Если $U-$ единичный замкнутый шар с центром в начале координат в банаховом пространстве B и если размерность U больше n, то

$$d_n(U, B) = 1.$$

Доказательство. Пусть X_n- некоторое n-мерное подпространство пространства B и пусть $y-$ элемент пространства B, не принадлежащий X_n. Известно (см. теорему 4.1 главы 1), что если $B-$ банахово пространство, то существует элемент $x_n \in X_n$, такой, что $\|y - x_n\| = \rho(y, X_n)$. Так как $y \notin X_n$, то $\|y - x_n\| = \alpha > 0$.

Введем элемент $z = (y - x_n)/\alpha$. Очевидно $\|z\| = 1$, т. е. $z \in U$. Покажем, что $\rho(z, X_n) = 1$, т. е. ближайшим к элементу z элементом из X_n является нулевой элемент. Предположим противное, т. е. предположим, что существует элемент $z_n \in X_n$, такой, что $\|z - z_n\| = \beta < 1$. Тогда из равенства $\beta = \|z - z_n\| = \|\frac{y-x_n}{\alpha} - z_n\| = \frac{1}{\alpha}\|y - x_n - \alpha z_n\|$ имеем $\|y - (x_n + \alpha z_n)\| = \alpha\beta < \alpha$, что невозможно, так как $(x_n + \alpha z_n) \in X_n$, а наилучшее приближение элемента $y \in B$ элементами подпространства X_n равно α. Из полученного противоречия следует, что $\rho(z, X_n) =$
$= 1$. Тем более $E_{X_n}(U) = 1$. Так как X_n произвольное n-мерное подпространство банахова пространства B, то $d_n(U, B) = 1$.

Теорема доказана.

При оценках снизу поперечников Бабенко потребуются некоторые факты из комбинаторной топологии, которые приведем без доказательства.

Теорема 1.3 (Теорема Лебега – Брауэра) [82]. Если Q^n- $- n$-параллелепипед, то $\dim Q^n = n$.

Теорема 1.4 (Теорема Лебега о покрытиях) [82]. Пусть никакой элемент конечного замкнутого покрытия $\alpha = \{A_k\}$ $(n+1)$-параллелепипеда Q^{n+1} не пересекается с двумя противоположными гранями. Тогда кратность этого покрытия не меньше чем $n + 2$.

Следствием этих утверждений является теорема Борсука.

Теорема 1.5 (Теорема Борсука) [82]. Пусть отображение $\Pi : Q^{n+1} \to R^n$ непрерывно. Существуют такие лежащие на противоположных гранях параллелепипеда Q^{n+1} точки q_1 и q_2, что $\Pi(q_1) = \Pi(q_2)$.

Другой способ оценки снизу поперечников Колмогорова опирается на утверждение, которое приведем, следуя [99].

Напомним, что определение компактного хаусдорфова пространства дано в разделе 4 главы 1.

Лемма 1.2 [99]. Пусть $B-$ хаусдорфово компактное пространство, $\Psi-$ класс функций, принадлежащих $C(B)$. Пусть в B существует $n+1$ точка $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n$ и пусть существует такое положительное число $\varepsilon(\varepsilon > 0)$ со следующими свойствами: для любой последовательности знаков $\lambda_i = \pm 1$, $i = 0, 1, 2, \ldots, n$, существует функция $f(x) \in \Psi$, такая, что

$$\operatorname{sign} f(x_i) = \lambda_i, \quad |f(x_i)| \geq \varepsilon, \quad i = 0, 1, 2, \ldots, n. \tag{1.2}$$

Тогда в пространстве $C(B)$

$$d_n(\Psi, C(B)) \geq \varepsilon.$$

Доказательство. Пусть X_n- произвольное n-мерное подпространство пространства C с базисом $\varphi_1, \varphi_1, \ldots, \varphi_n$. Рассмотрим систему из n линейных уравнений с $n+1$ неизвестными

$$\sum_{l=0}^{n} c_l \varphi_k(x_l) = 0, \quad k = 1, \dots, n. \tag{1.3}$$

Очевидно, система уравнений (1.3) имеет нетривиальное решение
$c_0^*, c_1^*, \dots, c_n^*$, такое, что $\sum\limits_{k=0}^{n} |c_k^*| = 1$. Выберем систему чисел λ_j, $j = 0, 1, \dots, n$, такую, что $\lambda_j c_j^* \ge 0$. Пусть функция $f^*(x)$ удовлетворяет условию (1.2) при данных λ_j, $j = 0, 1, \dots, n$. Тогда

$$\|f^*(x) - \sum_{l=1}^{n} \alpha_l \varphi_l(x)\| \ge \sum_{k=0}^{n} |c_k^*| |f^*(x_k) - \sum_{l=1}^{n} \alpha_l \varphi_l(x_k)| \ge$$

$$\ge |\sum_{k=0}^{n} (c_k^* f^*(x_k) - \sum_{l=1}^{n} c_k^* \alpha_l \varphi_l(x_k))| =$$

$$= |\sum_{k=0}^{n} c_k^* f^*(x_k) - \sum_{l=1}^{n} \alpha_l \sum_{k=0}^{n} c_k^* \varphi_l(x_k)| =$$

$$= |\sum_{k=0}^{n} c_k^* f^*(x_k)| = \varepsilon |\sum_{k=0}^{n} c_k^* \lambda_k| = \varepsilon \sum_{k=0}^{n} |c_k^*| = \varepsilon,$$

где $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)-$ произвольный n-мерный вектор.

Из произвольности вектора $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ следует, что отклонение функции $f^*(x)$ от подпространства X_n не меньше ε.

Лемма доказана.

При оценке сверху поперечников Колмогорова часто используется следующее утверждение.

Теорема 1.6 [37]. Пусть $X_{n+1} - (n+1)$-мерное подпространство банахова пространства B и пусть $U_{n+1}-$ замкнутый единичный шар в X_{n+1}. Тогда

$$d_n(U_{n+1}, B) = 1.$$

Доказательство этого утверждения основано на теореме Борсука, которую приведем в следующем изложении, несколько отличном от данного ранее.

Пусть $\sum_n$ означает единичную сферу $x_1^2 + \dots + x_{n+1}^2 = 1$ в $(n+1)$-мерном евклидовом пространстве E_{n+1}. Рассмотрим n-мерные векторные поля на $\sum_n$. Векторное поле $P(y)$ определено на $\sum_n$, если каждому элементу $y \in \sum_n$ ставится в соответствие элемент $P(y)$, принадлежащий некоторому фиксированному n-мерному банахову пространству X_n.

Теорема 1.7 (Борсука). Пусть $P(y)-$ непрерывное n-мерное векторное поле, определенное на $\sum_n$, пусть $P(y)-$ нечетно, т. е.

$P(-y) =$
$= -P(y)$ для всех $y \in \sum_n$. Тогда существуют такие точки $y^* \in \sum_n$, которые отображаются векторным полем $P(y)$ в нуль: $P(y^*) = 0$.

Наряду с леммой 1.2 и теоремой 1.6 при исследовании поперечников Колмогорова используется следующее утверждение, принадлежащее Ю. И. Маковозу [59].

Теорема 1.8. Пусть $L-$ линейное нормированное пространство, $\sum^{n-1}$ – единичная сфера (с центром в нуле) некоторого n-мерного банахова пространства. Пусть дано непрерывное нечетное отображение $f : \sum^{n-1} \to L,\ k = f(\sum^{n-1})$. Положим $h = \min\limits_{x \in k}(\|x\|)$. Тогда $d_m(k, L) > h$ при $m < n$.

Обозначим через l_p^n пространство R_n векторов $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ с нормой

$$\|x\|_{l_p^n} = \begin{cases} (\sum\limits_{k=1}^{n} |x_k|^p)^{1/p} & \text{при} \quad 1 \le p < \infty, \\ \max\limits_{1 \le k \le n} |x_k| & \text{при} \quad p = \infty. \end{cases}$$

Через B_p^n обозначим единичный шар в l_p^n.

Для «конечномерных» поперечников справедливы следующие оценки [43, с. 334 – 335].

Теорема 1.9. Пусть $1 \le n < m < \infty$.

Справедливо неравенство

$$d_n(B_2^m, l_\infty^m) \le \frac{C}{\sqrt{n}} \left(1 + \ln \frac{m}{n}\right)^{3/2}.$$

Теорема 1.10. Пусть $1 \le p \le q \le \infty$. Тогда

$$d_n(B_p^{2n}, l_q^{2n}) \asymp \begin{cases} 1, & \text{если} \quad q \le 2, \\ n^{-\frac{1}{2}+\frac{1}{q}}, & \text{если} \quad p \le 2, q > 2, \\ n^{-\frac{1}{p}+\frac{1}{q}}, & \text{если} \quad p > 2. \end{cases}$$

2. Поперечники на классе $\mathbf{Q_{r,\gamma,p}}([-\mathbf{1}, \mathbf{1}], \mathbf{M})$ функций одной переменной

Теорема 2.1 [19], [22], [24]. Пусть $\Omega = [-1, 1]$. Справедлива оценка $\delta_n(Q_r(\Omega, M)) \asymp d_n(Q_r(\Omega, M), C) \asymp n^{-2r-1}$.

Доказательство. Вначале оценим снизу поперечник $\delta_n(Q_r(\Omega, M))$. Разделим сегмент $[-1, 1]$ на $2n+2$ части точками $t_k = -1 + (k/(n+ +1))^v,\ k = 0, 1, \ldots, n+1,\ t_k = 1 - ((2(n+1) - k)/(n+1))^v,\ k = = n+2, \ldots, 2n+2,\ v = (2r+1)/r$. Обозначим через Δ_k сегменты $\Delta_k =$

$= [t_k, t_{k+1}],\ k = 0, 1, \ldots, 2n+1$. На сегментах Δ_k, $k = 0, 1, \ldots, 2n+1$, построим функции

$$\varphi_k(t) = \begin{cases} A\frac{((t-t_k)(t_{k+1}-t))^s}{h_k^s d(t'_k,\Gamma)^\gamma} & \text{при} \quad t \in \Delta_k, \\ 0 & \text{при} \quad t \in [-1,1] \setminus \Delta_k. \end{cases}$$

Здесь $h_k = |t_{k+1} - t_k|$, $k = 0, 1, \ldots, 2n+1$, $s = 2r+1$, $\gamma = r+1$, $t'_k = (t_k + t_{k+1})/2$, $d(t, \Gamma)-$ расстояние от точки t до концов сегмента $[-1, 1]$; константа A подбирается таким образом, чтобы функции $\varphi_k(t) \in Q_r(\Omega, M)$ при всех $k = 0, 1, \ldots, 2n+1$.

Покажем, что такая константа существует. Для удобства дальнейших обозначений запишем функцию $\varphi_k(t)$ на сегменте Δ_k, $k = 0, 1, \ldots, 2n+1$, в виде $\varphi_k(t) = D_k(t-t_k)^s(t_{k+1}-t)^s$. Воспользовавшись формулой Лейбница для производных l-го ($l = 1, 2, \ldots, s$) порядка, имеем:

$$\varphi_k^{(l)}(t) = D_k \sum_{j=0}^{l} C_j^l((t-t_k)^s)^{(j)}((t_{k+1}-t)^s)^{(l-j)} =$$

$$= D_k \sum_{j=0}^{l} (-1)^{l-j} \frac{l!(s!)^2}{(j!)(l-j)!(s-j)!(s-l+j)!}(t-t_k)^{s-j}(t_{k+1}-t)^{s-l+j}.$$

Оценим по модулю функцию $\varphi_k^{(l)}(t)$. Введя обозначение

$$F(l, j) = (-1)^{l-j} \frac{l!(s!)^2}{j!(l-j)!(s-j)!(s-l+j)!},$$

представим функцию $\varphi_k^{(l)}(t)$ в виде

$$\varphi_k^{(l)}(t) = A\frac{1}{h_k^s(d(t'_k, \Gamma))^\gamma} \sum_{j=0}^{l} F(l, j)(t-t_k)^{s-j}(t_{k+1}-t)^{s-l+j}.$$

Нетрудно видеть, что

$$|\varphi_k^{(j)}(t)| \le A\frac{1}{h_k^s(d(t'_k), \Gamma)^\gamma} \sum_{j=0}^{l} |F(l, j)| h_k^{2s-l} =$$

$$= A\frac{h_k^{s-l}}{(d(t'_k, \Gamma))^\gamma} F(l),$$

где $F(l) = \sum\limits_{j=0}^{l} |F(l, j)|$.

Очевидно,

$$\frac{h_k^{s-l}}{(d(t'_k,\Gamma))^\gamma} = \left(\left(\frac{k+1}{n+1}\right)^v - \left(\frac{k}{n+1}\right)^v\right)^{s-l} \frac{2^\gamma (n+1)^{v\gamma}}{((k+1)^v + k^v)^\gamma} \le$$

$$\le \frac{2^\gamma v^{s-l}}{(n+1)^{v(s-l-\gamma)}} \frac{(k+\Theta)^{(v-1)(s-l)}}{(k+1)^{v\gamma}} \le$$

$$\le \frac{2^\gamma v^{s-l}}{(n+1)^{v(s-l-\gamma)}} \frac{(k+1)^{v(s-l-\gamma)}}{(k+1)^{s-l}} \le 2^\gamma v^{s-l}.$$

Следовательно,

$$|\varphi_k^{(l)}(t)| \le AF(l) 2^\gamma v^{s-l}.$$

Нетрудно видеть, что $|\varphi_k^{(r)}(t)| \le M_1$ для всех $k = 0, 1, \ldots, 2n-1$.

Из последних неравенств следует, что можно подобрать константу A, независящую от сегмента Δ_k, $k = 0, 1, \ldots, 2n+1$, и такую, что $\varphi_k(t) \in Q_r(\Omega, M)$.

Покажем, что на каждом сегменте Δ_k, $k = 0, 1, \ldots 2n+1$, максимальное значение функции $\varphi_k(t)$ не меньше Bn^{-s}, где $B-$ некоторая постоянная.

Пусть $k = 0$ (аналогично $k = 2n+1$). Тогда

$$\|\varphi_0(t)\|_C \ge A \frac{n^{v\gamma} h_0^s}{2^{2s}} = \frac{A}{2^{2s}} \frac{1}{(n+1)^s}.$$

Пусть $k = 1, 2, \ldots, 2n$. Тогда

$$\|\varphi_k(t)\|_C \ge \frac{A h_k^s}{2^{2s}} \frac{1}{((k+1)/(n+1))^{(r+1)v}} =$$

$$= \frac{A}{2^{2s}} \left(\left(\frac{k+1}{n+1}\right)^v - \left(\frac{k}{n+1}\right)^v\right)^s \frac{1}{(k+1)/(n+1)^{(r+1)v}} \ge$$

$$\ge \frac{Av^s}{2^{2s}} \frac{(k+\Theta)^{(v-1)s}}{(k+1)^{(r+1)v}} \frac{1}{(n+1)^{v(s-r-1)}} \ge$$

$$\ge \frac{Av^s}{2^{2s}} \left(\frac{k}{k+1}\right)^{(r+1)(2r+1)/r} \frac{1}{(n+1)^{(2r+1)}} \ge$$

$$\ge \frac{Av^s}{2^{s(3+1/r)}} \frac{1}{(n+1)^s}.$$

Таким образом, при всех k, $k = 0, 1, \ldots 2n+1$,

$$\|\varphi_k(t)\|_C \ge \frac{Av^s}{2^{s(3+1/r)}} \frac{1}{(n+1)^s}.$$

Обозначим через $\xi(t)$ линейную комбинацию

$$\xi(t) = \sum_{k=0}^{2n+1} \xi_k \varphi_k(t),$$

где $|\xi_k| \le 1,\ k = 0, 1, \dots, 2n+1$.

Нетрудно видеть, что $\xi(t) \in Q_r(\Omega, M)$.

Семейство

$$\xi = \left\{ \xi(t) = \sum_{k=0}^{2n+1} \xi_k \varphi_k(t); |\xi_k| \le 1,\ k = 0, 1, \dots, 2n+1 \right\}$$

образует $(2n+2)$-параллелепипед, причем, как доказано выше, $\xi \in Q_r(\Omega, M)$.

Пусть $B_k = \max\limits_{t \in \Delta_k} \varphi_k(t)(n+1)^s$. Очевидно, что в пространстве C множество ξ имеет норму $\max\limits_k \frac{B_k}{(n+1)^s}$.

Рассмотрим линейное пространство

$$L^{2n+2} = \left\{ \bar{\xi} : \bar{\xi} = (\xi_0 B_0, \xi_1 B_1, \dots, \xi_{2n+1} B_{2n+1}) \right\}$$

с нормой $\|\bar{\xi}\| = \max\limits_k \left(\frac{B_k}{(n+1)^s} |\xi_k| \right)$. Отображение $P = \xi \to L^{2n+2}$ определяется равенством $P(\xi(t)) = \bar{\xi}$. Нетрудно видеть, что это отображение является изометрическим. Очевидно также, что $\bar{\xi} = \{\bar{\xi} : |\xi_k| \le$
$\le 1,\ k = 0, 1, \dots, 2n+1\}$ является $(2n+2)$-параллелепипедом. Расстояние между любой парой его противоположных граней не меньше $2B^*/(n+1)^{2r+1}$, где $B^* = \min\limits_k B_k$.

Для вычисления поперечника $\delta_{2n+1}(Q_r(\Omega, M))$ нужно заметить, что по определению поперечника Бабенко банахово пространство C отображается непрерывным оператором Π в R^{2n+1}. При этом $(2n+2)$-параллелепипед отображается также в R^{2n+1}. По теореме Борсука при этом две точки q_1 и q_2, лежащие на противоположных гранях параллелепипеда $\bar{\xi}$, отображаются в одну: $\Pi(q_1) = \Pi(q_2)$.

Пусть точки

$$(\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_{j-1}, 1, \xi_{j+1}, \dots, \xi_{2n+1}) \tag{2.1}$$

и

$$(\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_{j-1}, -1, \xi_{j+1}, \dots, \xi_{2n+1}), \tag{2.2}$$

отображаются в точку

$$(\xi_0^*, \xi_1^*, \dots, \xi_{j-1}^*, \eta_j^*, \xi_{j+1}^*, \dots, \xi_{2n+1}^*), \tag{2.3}$$

где $\xi_0^*, \xi_1^*, \ldots, \xi_{j-1}^*, \xi_{j+1}^*, \ldots, \xi_{2n+1}^*$, η_j^*- некоторые фиксированные числа.

Таким образом, прообразом вектора (2.3) могут быть как вектор (2.1), так вектор (2.2). Следовательно, диаметр множества $\Pi^{-1}(\xi_0^*, \xi_1^*, \ldots, \xi_{j-1}^*, \eta_j^*, \xi_{j+1}^*, \ldots, \xi_{2n+1}^*)$ будет не меньше 2.

Учитывая нормировку множества $\xi(t)$, легко замечаем, что расстояние между двумя противоположными гранями в параллелепипеде $\xi(t)$ не меньше $\frac{2B^*}{(n+1)^{2r+1}}$. Следовательно,

$$\delta_{2n}(Q_r(\Omega, M)) \geq \delta_{2n+1}(Q_r(\Omega, M)) \geq \frac{2B^*}{(n+1)^{2r+1}}.$$

Таким образом доказано, что при любом натуральном n

$$\delta_n(Q_r(\Omega, M)) \geq \frac{C}{n^{2r+1}}, \, C = \text{const}.$$

Построим непрерывный сплайн, приближающий функции из класса $Q_r(\Omega, M)$ с точностью An^{-2r-1} и имеющий $N = 4nr + 2n - 2r - 2$ параметров. Для этого разделим сегмент $[-1, 1]$ на $2n$ частей точками $t_k = -1 + (k/n)^v$ и $\tau_k = 1 - (k/n)^v, k = 0, 1, \ldots, n,$ где $v = (2r+1)/r$. На сегменте $[-1, t_1]$ (соответственно $[\tau_1, 1]$) функция $f \in Q_r(\Omega, M)$ приближается интерполяционным полиномом $P_r(t, [-1, t_1])(P_r(t, [\tau_1, 1]))$, который строится следующим образом. Пусть на сегменте $[-1, 1]$ задана функция $\varphi(t) \in W^r$. Обозначим через $\zeta_k (k = 1, 2, \ldots, r)$ нули полинома Чебышева первого рода степени r, наименее уклоняющегося от нуля на сегменте $[-1, 1]$. Отобразим сегмент $[\zeta_1, \zeta_r] \subset [-1, 1]$ на сегмент $[-1, t_1]([\tau_1, 1])$ таким образом, чтобы точки ζ_1 и ζ_r перешли в точки -1 и t_1 (τ_1 и 1). Точки, являющиеся образами точек ζ_i, при отображении сегмента $[\zeta_1, \zeta_r]$ на сегмент $[-1, t_1]([\tau_1, 1])$ обозначим через $\zeta_i', (\zeta_i''), i = 1, 2, \ldots, r$. По узлам $\{\zeta_i'\}(\{\zeta_i''\})$ строится интерполяционный полином степени $r - 1$, который обозначается через $P_r(t, [-1, t_1])(P_r(t, [\tau_1, 1]))$. На остальных сегментах $[t_k, t_{k+1}]([\tau_{k+1}, \tau_k])$ аппроксимация осуществляется интерполяционными полиномами
$P_{2r+1}(t, [t_k, t_{k+1}])(P_{2r+1}(t, [\tau_{k+1}, \tau_k]))$. Построенный таким образом сплайн обозначим через $f_N(t)$. Отметим, что частным случаем доказанной ниже теоремы 2.2 является неравенство $\| f(t) - f_N(t) \| \leq$ $\leq AN^{-2r-1}$.

Для завершения доказательства теоремы достаточно вспомнить соотношение $\delta_n \leq 2d_n$, приведенное в теореме 1.1.

Следствие. Справедливы оценки

$$\delta_n(W^r(M)) \asymp d_n(W^r(M)) \asymp n^{-r}.$$

Доказательство. Справедливость следствия вытекает из того очевидного факта, что классы функций $W^r(M)$ и $Q_{r,\gamma}(\Omega, M), \Omega = [-1, 1]$ совпадают при $s = r, \gamma = 0$.

Теорема 2.2. Пусть $\Omega = [-1, 1]$. Тогда справедлива оценка

$$\delta_n(Q_{r,\gamma}(\Omega, M)) \asymp d_n(Q_{r,\gamma}(\Omega, M)) \asymp n^{-s}.$$

Доказательство. Оценка $\delta_n(Q_{r,\gamma}(\Omega, M)) \geq An^{-s}$ следует из того, что класс функций W^s вложен в класс $(Q_{r,\gamma}(\Omega, M))$ и из оценки поперечников Бабенко $\delta_n(W^s) \geq An^{-s}$, приведенной в предыдущем следствии.

Построим непрерывный сплайн $f_N(t)$, приближающий функции из класса $Q_{r,\gamma}(\Omega, M)$ с точностью An^{-s} и имеющий $2ns - 2n + 1$ параметр.

Для этого разделим сегмент $[-1, 1]$ на $N = 2n$ частей точками $t_k = -1 + (k/n)^v$ и $\tau_k = 1 - (k/n)^v, k = 0, 1, \ldots, n$, где $v = s/(s - \gamma)$. Пусть $\Delta_k = [t_k, t_{k+1}], \Delta_k^* = [\tau_{k+1}, \tau_k], k = 0, 1, \ldots, n - 1$.

Сплайн $f_N(t)$ состоит из интерполяционных полиномов $P_s(f, \Delta_k)$, $P_s(f, \Delta_k^*)$, $k = 0, 1, \ldots, n - 1$, которые строятся следующим образом. В сегменте $[a, b]$ аппроксимируем функцию $f(t)$ интерполяционным полиномом $P_s(f, [a, b])$ степени $s - 1$, построенным по узлам ζ_l', $l =$
$= 1, 2, \ldots, s$, являющимися образами узлов $\zeta_1, \ldots, \zeta_s$ полинома Чебышева первого рода степени s, полученными при отображении сегмента $[\zeta_1, \zeta_r]$ на сегмент $[a, b]$.

Замечание. Узлы полиномов Чебышева первого рода выбраны потому, что они обладают самой малой по порядку константой Лебега.

Покажем, что $\| f(t) - f_N(t) \| \leq AN^{-2r-1}$.

Рассмотрим в отдельности случаи, когда $\gamma-$ целое число и когда $\gamma-$ нецелое число.

Вначале рассмотрим первый случай. Пусть $k = 0$. Тогда

$$\|f(t) - P_s(f, \Delta_0)\|_{C(\Delta_0)} \leq \frac{A}{r!} h_0^r = A\left(\frac{1}{n}\right)^{vr} = A\left(\frac{1}{n}\right)^s.$$

Аналогичная оценка справедлива и для сегмента Δ_0^*.

Пусть $k = 1, 2, \ldots, n - 1$. Тогда

$$\|f(t) - P_s(f, \Delta_k)\|_{C(\Delta_k)} \leq \frac{A}{s!} h_k^s \left(\frac{n}{k}\right)^{v\gamma} =$$

$$= \frac{A}{s!}\left(\left(\frac{k+1}{n}\right)^v - \left(\frac{k}{n}\right)^v\right)^s \left(\frac{n}{k}\right)^{v\gamma} =$$

$$= \frac{A}{s!}\left(\frac{v(k+\Theta)^{v-1}}{n^v}\right)^s \left(\frac{n}{k}\right)^{v\gamma} \leq A\left(\frac{1}{n}\right)^s.$$

Эта оценка справедлива для сегментов Δ_k^*, $k = 1, 2, \ldots, n-1$. Таким образом, при $\gamma-$ целом справедлива оценка

$$\|f(t) - f_N(t)\|_C \leq A\frac{1}{n^s}.$$

Рассмотрим случай, когда $\gamma-$ нецелое число. Оценка

$$\|f(t) - P_s(f,\Delta_k)\|_{C(\Delta_k)} \leq A\frac{1}{n^s},$$

справедливая при $k \neq 0$, доказывается повторением проведенных выше рассуждений.

Остановимся на случае, когда $k = 0$. Воспользовавшись формулой Тейлора с остаточным членом в интегральной форме, имеем:

$$\|f(t) - P_s(f,\Delta_0)\|_{C(\Delta_0)} \leq A\lambda_s\|\frac{1}{r!}\int\limits_{-1}^{t}(t-\tau)^r f^{(r+1)}(\tau)d\tau\|_{C(\Delta_0)} \leq$$

$$\leq A\|\int\limits_{-1}^{t}(t-\tau)^r\frac{d\tau}{(1+\tau)^\mu}\|_{C(\Delta_0)} \leq A\left(\frac{1}{n}\right)^{v(r+1-\mu)} \leq A\left(\frac{1}{n}\right)^s.$$

Таким образом, и при $\gamma-$ нецелом справедлива оценка

$$\|f(t) - f_N(t)\|_{C([-1,1])} \leq A\left(\frac{1}{n}\right)^s.$$

Завершается доказательство теоремы точно так же, как доказательство предыдущей теоремы.

Теорема 2.3. Пусть $\Omega = [-1,1]$. Тогда справедлива оценка

$$\delta_n(\bar{Q}_{r,\gamma}(\Omega,M)) \asymp d_n(\bar{Q}_{r,\gamma}(\Omega,M),C) \asymp n^{-s}.$$

Доказательство. Оценка $\delta_n(\bar{Q}_{r,\gamma}(\Omega,M)) \geq An^{-s}$ следует из оценки $\delta_n(Q_{r,\gamma}(\Omega,M)) \geq An^{-s}$, полученной в теореме 2.2, так как множество функций $Q_{r,\gamma}(\Omega,M)$ вложено в множество функций $\bar{Q}_{r,\gamma}(\Omega,M)$.

Для оценки сверху поперечника Колмогорова $d_n(\bar{Q}_{r,\gamma}(\Omega,M),C)$ построим непрерывный локальный сплайн, имеющий размерность

$O(n)$ и аппроксимирующий функции, принадлежащие компакту $\bar{Q}_{r,\gamma}(\Omega, M)$ с точностью $O(n^{-s})$.

Покроем сегмент $[-1,1]$ более мелкими сегментами $\Delta_k = [t_k, t_{k+1}]$ и $\Delta_k^* = [\tau_{k+1}, \tau_k]$, где $t_k = -1 + (k/n)^v$, $\tau_k = 1 - (k/n)^v$, $k = 0,1,\dots,n$, $v = s/r$. Сегменты Δ_0 и Δ_0^* покроем еще более мелкими сегментами $\Delta_{0,j} = [t_{0,j}, t_{0,j+1}]$, $t_{0j} = -1 + j(1/n)^v/L$, $\Delta_{0,j}^* = [\tau_{0,j+1}, \tau_{0,j}]$, $\tau_{0,j} = 1 -$
$-j(1/n)^v/L$, $j = 0,1,\dots,L-1$, $L = [\ln n]$.

В каждом из сегментов $\Delta_{0,j}$, $j = 0,1,\dots,L-1$, Δ_k, Δ_k^*, $k =$
$= 1,2,\dots,n-1$, $\Delta_{0,j}^*$, $j = 0,1,\dots,L-1$, функция $f(t)$ аппроксимируется интерполяционным полиномом $P_s(f, \Delta_{0,j})$, $j = 0,1,\dots,L-1$, $P_s(f,\Delta_k)$, $P_s(f,\Delta_k^*)$, $k = 1,2,\dots,n-1$, $P_s(f,\Delta_{0,j}^*)$, $j = 0,1,\dots,L-1$, соответственно. Сплайн, составленный из этих полиномов, обозначим через $f_n(t)$.

Выше было показано, что на сегментах Δ_k, Δ_k^*, $k = 1,2,\dots,n-1$, справедлива оценка $\|f(t) - f_n(t)\|_C \le An^{-s}$. Осталось оценить $\|f(t) -$
$-f_n(t)\|_C$ на сегментах $\Delta_{0,j}$, $\Delta_{0,j}^*$, $j = 0,1,\dots,L-1$. Вначале оценим $\|f(t) - f_n(t)\|_C$ на сегменте $\Delta_{0,0}$. Очевидно,

$$\|f(t) - f_n(t)\|_{C(\Delta_{0,0})} \le AE_{s-1}(f, \Delta_{0,0})\lambda_{s-1},$$

где $E_s(f, \Delta_{0,0})$– наилучшее приближение функции $f(t)$ на сегменте $\Delta_{0,0}$ полиномами степени не выше s; λ_s– константа Лебега.

Известны [83] оценки наилучших приближений для функций, производные которых имеют степенные и логарифмические особенности.

Однако для нашей цели достаточно ограничиться оценкой приближения функции $f(t)$ отрезком ряда Тейлора

$$T_{r-1}(f, \Delta_{0,0}, -1) = f(-1) + \frac{f'(-1)}{1!}(t+1) + \dots + \frac{f^{(r-1)}(-1)}{(r-1)!}(t+1)^{r-1}.$$

Воспользовавшись остаточным членом формулы Тейлора в интегральной форме, имеем:

$$|f(t) - T_{r-1}(f, \Delta_{0,0}, -1)| \le \frac{1}{(r-1)!}|\int\limits_{-1}^{t} f^{(r)}(v)(t-v)^{r-1}dv| \le$$

$$\le \frac{1}{(r-1)!}|\int\limits_{-1}^{t} |\ln(1+v)|(t-v)^{r-1}dv| \le$$

$$\leq \frac{1}{r!}(h_{00}^r|\ln h_{00}| + h_{00}^r) \leq B\frac{1}{n^s \ln^{r-1} n},$$

где $h_{0k} = |t_{0,k+1} - t_{0,k}|$, $k = 0, 1, \ldots, L-1$.

Таким образом,

$$E_{r-1}(f, \Delta_{0,0}) \leq \frac{B}{n^s \ln^{r-1} n}$$

и, следовательно,

$$\|f(t) - P_s(f, \Delta_{0,0})\|_{C(\Delta_{0,0})} \leq \frac{B}{n^s \ln^{r-1} n}.$$

Перейдем теперь к оценке точности аппроксимации функции $f(t) \in$
$\in Q_{r,\gamma}(\Omega, M)$ сплайном $f_n(t)$ на сегментах $\Delta_{0,k}$, $k = 1, 2, \ldots, L-1$.

Очевидно,

$$\|f(t) - f_n(t)\|_{C(\Delta_{0,k})} \leq \frac{M\lambda_{s-1}}{(1+t_{0k})^\gamma} h_{0k}^s \leq$$

$$\leq \frac{M\lambda_{s-1}}{k^\gamma}(n^v \ln n)^\gamma \left(\frac{1}{n^v \ln n}\right)^s = \frac{B}{n^s \ln^r n}.$$

Таким образом, построен непрерывный локальный сплайн $f_n(t)$, аппроксимирующий функцию $f(t)$ с точностью $\|f(t) - f_n(t)\|_C \leq Bn^{-s}$.

Размерность сплайна $f_n(t)$ при целом γ равна $2(s+1)(n+[\ln n]) =$ $= 2n(s+1)\left(1 + \frac{[\ln n]}{n}\right) \leq 4(s+1)n$. Поэтому $d_{4(s+1)n}(\bar{Q}_{r,\gamma}(\Omega, M), C) \leq$ $\leq Bn^{-s}$ и, следовательно, $d_n(\bar{Q}_{r,\gamma}(\Omega, M), C) \leq Bn^{-s}$.

Из проведенных выше выкладок следует, что справедливы неравенства

$$\delta_n(\bar{Q}_{r,\gamma}(\Omega, M)) \geq Bn^{-s},$$

$$d_n(\bar{Q}_{r,\gamma}(\Omega, M), C) \leq Bn^{-s}.$$

Так как

$$\delta_n(\bar{Q}_{r,\gamma}(\Omega, M)) \leq 2d_n(Q_{r,\gamma}(\Omega, M), C),$$

то

$$\delta_n(\bar{Q}_{r,\gamma}(\Omega, M)) \asymp d_n(Q_{r,\gamma}(\Omega, M), C) \asymp n^{-s}.$$

Теорема доказана.

Теорема 2.4. Пусть $\Omega = [-1, 1], \infty \geq p \geq q \geq 1, \gamma-$ целое число. Справедлива оценка $d_n(Q_{r,\gamma,p}(\Omega, M), L_q) \asymp n^{-s}$.

Доказательство. Вначале вычислим поперечник $d_n(Q_{r,\gamma,p}(\Omega, M), L_1)$. Согласно теореме 1.8, для оценки снизу величины поперечника $d_n(Q_{r,\gamma,p}(\Omega, M), L_1)$ нужно найти минимум по t_k норм $\| \varphi(t) \|_{L_1}$, где φ пробегает множество функций, принадлежащих $Q_{r,\gamma,p}(\Omega, M)$ и обращающихся в нуль в n точках t_k. Очевидно, $\min\limits_{t_k} \| \varphi(t) \|_{L_1}$ не увеличится, если к точкам t_k добавить еще $2M+1$ точку $\zeta_{\pm k} = \pm 1 \mp (k/M)^v, k = 0, 1, \ldots, M, L = [\ln n], M = = [n/L], v = (s+1)/(s+1-\gamma)$. Обозначим через $\{w_k\}, k = 1, 2, \ldots, N,$ $N = n + 2M + 1$, объединение точек $\{t_k\} (k = 1, 2, ..., n)$ и $\{\zeta_{\pm l}\}, l = = 0, 1, \ldots, M$.

Введем функцию $\psi^*(t)$, которая определяется на каждом сегменте $\Delta_k = [w_k, w_{k+1}]$, $k = 0, 1, \ldots, N-1$, формулой

$$\psi^*(t) = A \frac{((t - w_k)(w_{k+1} - t))^s}{(w_{k+1} - w_k)^s (d(\Gamma, (w_k + w_{k+1})/2))^\gamma},$$

где $d(\Gamma, (w_k + w_{k+1})/2)-$ расстояние от границы Γ сегмента $[-1, 1]$ (т. е. от точек ± 1) до точки $(w_k + w_{k+1})/2$. Константа A подбирается из требования, чтобы $\psi^* \in Q_{r,\gamma,p}([-1, 1], M)$.

Нетрудно заметить, что

$$\| \psi^*(t) \|_{L_1} = A[\int\limits_{-1}^{\zeta_{-1}} |\psi^*(t)| dt + \sum_{k=1}^{M-1} \int\limits_{\zeta_{-k}}^{\zeta_{-k-1}} |\psi^*(t)| dt +$$

$$+ \sum_{k=1}^{M-1} \int\limits_{\zeta_{k+1}}^{\zeta_k} |\psi^*(t)| dt + \int\limits_{\zeta_1}^{1} |\psi^*(t)| dt \geq$$

$$\geq A \left[\frac{1}{(d(\Gamma, \zeta_1))^\gamma} \frac{1}{(N_0 + 1)^s} + \sum_{k=1}^{M-1} \frac{1}{(d(\Gamma, \zeta_{-k-1}))^\gamma} \frac{1}{(N_{-k} + 1)^s} + \right.$$

$$\left. + \sum_{k=1}^{M-1} \frac{1}{(d(\Gamma, \zeta_{k+1}))^\gamma} \frac{1}{(N_k + 1)^s} + \frac{1}{(d(\Gamma, \zeta_1))^\gamma} \frac{1}{(N_0^* + 1)^s} \right] \geq \frac{A}{N^s},$$

где N_0- число узлов t_l на сегменте $[-1, \zeta_{-1}]$; $N_{-k}-$ число узлов t_l на сегменте $[\zeta_{-k}, \zeta_{-k+1}]$, $k = 1, 2, \ldots, M-1$; N_k- число узлов t_l на сегменте $[\zeta_{k+1}, \zeta_k]$; N_0^*- число узлов t_l на сегменте $[\zeta_1, 1]$.

Таким образом, $d_n(Q_{r,\gamma,p}, (\Omega, M), L_1) \geq AN^{-s}$, и следовательно,

$$d_n(Q_{r,\gamma,p}(\Omega, M), L_p) \geq d_n(Q_{r,\gamma,p}(\Omega, M), L_1) \geq AN^{-s}. \tag{2.4}$$

Построим сплайн, реализующий эту оценку. Разобьем сегмент $[-1,1]$ на $2N$ частей точками $t_k = -1+(k/N)^v, \tau_k = 1-(k/N)^v, k = 0,1,2,\ldots,N$, $v = s/r$. На каждом сегменте $\Delta_k = [t_k, t_{k+1}]$ (аналогично $\Delta_k^* = [\tau_{k+1}, \tau_k]), k = 1,2,\ldots,N$, аппроксимация осуществляется отрезком ряда Тейлора $\varphi_k(t,\Delta_k) = T_{s-1}(\varphi, [t_k, t_{k+1}], t_k)$ (аналогично $\varphi_k^*(t,\Delta_k^*) = T_{s-1}(\varphi, [\tau_{k+1}, \tau_k], \tau_k)$, а на сегменте Δ_0 отрезком ряда Тейлора $\varphi_N(t,\Delta_0) = T_{r-1}(\varphi, [-1, t_1], t_1)$. Аналогично на сегменте Δ_0^* аппроксимация осуществляется отрезком ряда Тейлора $\varphi_N^*(t,\Delta_0^*) =$
$= T_{r-1}(\varphi, [\tau_1, 1], \tau_1)$. Сплайн, составленный из полиномов $\varphi_N(t,\Delta_0)$, $\varphi_N(t,\Delta_k)$, $\varphi_N(t,\Delta_k^*)$, $\varphi_N(t,\Delta_0^*)$, обозначим через $\varphi_N(t)$. Пользуясь формулой Тейлора с остаточным членом в интегральной форме, оценим на сегменте $[t_k, t_{k+1}](k \neq 0)$ модуль разности:

$$|\varphi(t) - \varphi_N(t)| \leq \frac{1}{(s-1)!} \left| \int\limits_{t_k}^{t} \varphi^{(s)}(v)(t-v)^{s-1} dv \right| \leq$$

$$\leq \frac{1}{(s-1)!} \frac{1}{(1+t_k)^\gamma} \left| \int\limits_{t_k}^{t} \varphi^{(s)}(v)(t-v)^{s-1}(1+v)^\gamma dv \right| \leq$$

$$\leq \frac{A}{(1+t_k)^\gamma} \left[\int\limits_{t_k}^{t_{k+1}} \left|\varphi^{(s)}(v)(1+v)^\gamma\right|^p dv \right]^{1/p} (t_{k+1}-t_k)^{s-1/p}.$$

Отсюда

$$\left[\sum_{k=1}^{N-1} \int\limits_{t_k}^{t_{k+1}} \mid \varphi(t) - \varphi_N(t) \mid^p dt \right]^{1/p} \leq$$

$$\leq A \left[\sum_{k=1}^{N-1} \int\limits_{t_k}^{t_{k+1}} \left|\varphi^{(s)}(v) d(\Gamma, v)^\gamma\right|^p dv \frac{(t_{k+1}-t_k)^{sp}}{(1+t_k)^{\gamma p}} \right]^{1/p} \leq$$

$$\leq AN^{-s} \parallel \varphi^{(s)} d(\Gamma, v)^\gamma \parallel_{L_p} .$$

Рассмотрим сегмент $[-1, t_1]$ (сегмент $[\tau_1, 1]$ рассматривается аналогично)

$$\left[\int\limits_{-1}^{t_1} |\varphi(t) - \varphi_N(t)|^p dt \right]^{1/p} \leq$$

$$\leq \left[\frac{1}{r!} \int\limits_{-1}^{t_1} \left| \int\limits_{-1}^{t} \varphi^{(r)}(v)(t-v)^{r-1} dv \right|^p dt \right]^{1/p} \leq$$

$$\leq A(1+t_1)^{r+1/p} \leq AN^{-s(r+1/p)/r}.$$

Из последних двух неравенств следует, что

$$\| \varphi(t) - \varphi_N(t) \|_{L_p} \leq AN^{-s}.$$

Так как $q \leq p$, то

$$\|\varphi(t) - \varphi_N(t)\|_{L_q} \leq AN^{-s}. \tag{2.5}$$

Сопоставляя оценки (2.4), (2.5) и учитывая, что $n = 2N$, завершаем доказательство теоремы.

Теорема 2.5. Пусть $\Omega = [-1, 1]$. Справедливы оценки

$$d_n(Q_{r,\gamma,p}(\Omega, M), L_q) \geq A \begin{cases} n^{-s+1/p-1/q}, & \text{если } q \leq 2, \\ n^{-s+1/p-1/2}, & \text{если } p \leq 2, q > 2, \\ n^{-s}, & \text{если } p > 2. \end{cases}$$

Доказательство. Разобьем сегмент $[-1, 1]$ на $n = 2N$ частей точками $t_k = -1 + (k/N)^v, \tau_k = 1 - (k/N)^v, v = (s - 1/p + 1/q)/(s - \gamma - 1/p +$
$+1/q)$. Обозначим через $\varphi(t)$ бесконечно дифференцируемую функцию с носителем $[-1, 1]$, удовлетворяющую условию $\|\varphi^{(s)}(t)\|_{L_p[-1,1]} =$ 1. Введем функцию $\varphi_k(t)$, равную нулю всюду, кроме сегмента $\Delta_k(\Delta_k =$
$= [t_k, t_{k+1}], \Delta_k^* = [\tau_k, \tau_{k+1}], k = 0, 1, \ldots, N-1)$, а на сегменте Δ_k определяемую формулой

$$\left(\frac{h_k}{2}\right)^{s-1/p} \varphi\left(-1 + \frac{2(t-t_k)}{h_k}\right),$$

где $h_k = t_{k+1} - t_k$, $h_k^* = \tau_k - \tau_{k+1}$, $k = 0, 1, \ldots, N-1$.

Аналогичным образом функция $\varphi_k^*(t)$ определяется на сегментах Δ_k^*, $k = 0, 1, \ldots, N-1$.

Через $\tilde{\varphi}_k(t)$ обозначим функцию

$$\tilde{\varphi}_k(t) = \begin{cases} \frac{\varphi_k(t)}{((k+1)/N)^{v\gamma}} & \text{при } t \in \Delta_k, \\ 0 & \text{при } t = [-1,1] \backslash \Delta_k, \end{cases}$$

$k = 0, 1, \ldots, N-1$.

Аналогичным образом определяется функция

$$\tilde{\varphi}_k^*(t) = \begin{cases} \frac{\varphi_k^*(t)}{((k+1)/N)^{v\gamma}} & \text{при } t \in \Delta_k^*, \\ 0 & \text{при } t \in [-1,1] \backslash \Delta_k^*, \end{cases}$$

$k = 0, 1, \ldots, N-1$.

Нетрудно видеть, что функции $\tilde{\varphi}_k, \tilde{\varphi}^*_k \in Q_{r,\gamma,p}(\Omega, M)$.

Введем функцию $\bar{\varphi}_k(t)$, определяемую формулой $\bar{\varphi}_k(t) = \tilde{\varphi}_{k-1}(t)$ при $t \in \Delta_k$, $k = 1, 2, \ldots, N$, $\bar{\varphi}_k(t) = \tilde{\varphi}^*_{2N-k}(t)$ при $t \in \Delta^*_{2N-k}$, $k = N+1, \ldots, 2N$.

В результате достаточно громоздких вычислений получаем оценку

$$\left[\int\limits_{\Delta_k} |\bar{\varphi}_k(t)|^q\,dt\right]^{1/q} \asymp \left[\int\limits_{\Delta^*_k} |\bar{\varphi}^*_k(t)|^q\,dt\right]^{1/q} \asymp N^{-s+1/p-1/q}, \tag{2.6}$$

справедливую при всех k.

Рассмотрим множество функций

$$\psi^*(t) = \sum_{k=1}^{2N} c_k \bar{\varphi}_k(t), \tag{2.7}$$

где $\sum\limits_{k=1}^{2N} \mid c_k \mid^p = 1$.

Выше (см. теорему 1.10) была приведена оценка поперечников эллипсоидов

$$d_n(B_p^{2n}, l_q^{2n}) \asymp \begin{cases} 1 & \text{при } q \le 2, \\ n^{-1/2+1/q} & \text{при } p \le 2, q > 2, \\ n^{-1/p+1/q} & \text{при } p > 2. \end{cases} \tag{2.8}$$

Из (2.6) – (2.8) следует оценка

$$d_n(Q_{r,\gamma,p}([-1,1], M), L_q) \ge A \begin{cases} n^{-s+1/p-1/q}, & \text{если } q \le 2, \\ n^{-s+1/p-1/2}, & \text{если } p \le 2, q > 2, \\ n^{-s}, & \text{если } p > 2. \end{cases}$$

Теорема доказана.

В ряде случаев удается оценить сверху поперечник Колмогорова и построить сплайн, реализующий соответствующую оценку.

Теорема 2.6. Пусть $\Omega = [-1,1], 1 \le p < q \le 2, \gamma -$ целое число. Справедлива оценка

$$d_n(Q_{r,\gamma,p}(\Omega, M), L_q) \asymp n^{-s+1/p-1/q}.$$

Доказательство. Оценка снизу получена в предыдущей теореме. Построим сплайн, реализующий эту оценку.

Разобьем сегмент $[-1,1]$ на сегменты $\Delta_k = [t_k, t_{k+1}]$, $k = 0, 1, \ldots, 2N-1$, где $t_k = -1 + (k/N)^v$, $k = 0, 1, \ldots, N$, $t_k = 1 - ((2N-k)/N)^v$,

$k=N,N+1,\ldots,2N$, $v=(s-1/p+1/q)/(s-1/p+1/q-\gamma)$. Функцию $\varphi(t)$ будем аппроксимировать сплайном $\varphi_N(t)$, введенным при доказательстве теоремы 2.4. На сегменте Δ_k при $1\le k\le N-1$ справедливо неравенство

$$\int\limits_{t_k}^{t_{k+1}}|\varphi(t)-\varphi_N(t)|^q\,dt\le A\int\limits_{t_k}^{t_{k+1}}\left|\int\limits_{t_k}^{t}\frac{(t-u)^{s-1}\varphi^{(s)}(u)(1+u)^\gamma du}{|\;1+t_k\;|^\gamma}\right|^q dt\le$$

$$\le A(N/k)^{v\gamma q}\left[\int\limits_{t_k}^{t_{k+1}}\left|\varphi^{(s)}(u)(1+u)^\gamma\right|^p du\right]^{q/p}h_k^{sq+2-q}\le$$

$$\le AN^{-q(s-1/p+1/q)}\left[\int\limits_{t_k}^{t_{k+1}}\left|\varphi^{(s)}(u)(1+u)^\gamma\right|^p du\right]^{q/p}.$$

Аналогичная оценка справедлива и для сегментов Δ_k, $k=N+$ $+1,\ldots,2N-2$. При $k=0$ (аналогично при $k=2N-1$) имеем

$$\int\limits_{-1}^{t_1}|\varphi(t)-\varphi_N(t)|^q\,dt\le A(1/N)^{vqr+1}\le AN^{-(s-1/p+1/q)q}.$$

Из полученных оценок следует, что

$$\left[\int\limits_{-1}^{1}|\varphi(t)-\varphi_N(t)|^q\,dt\right]^{1/q}\le AN^{-(s-1/p+1/q)}+$$

$$+AN^{-(s-1/p+1/q)}\left[\sum_{k=1}^{2N-2}\left[\int\limits_{t_k}^{t_{k+1}}\left|\varphi^{(s)}(u)(d(u,\Gamma))^\gamma\right|^p du\right]^{q/p}\right]^{1/q}\le$$

$$\le AN^{-(s-1/p+1/q)}(\|\;\varphi^{(s)}(u)(d(u,\Gamma))^\gamma\;\|_{L_p}+1).$$

Теорема доказана.

Теорема 2.7. Пусть $\Omega=[-1,1]$, $\infty>p\ge q\ge1$. Справедлива оценка $d_n(\bar{Q}_{r,\gamma,p}(\Omega,M,L_q))\asymp n^{-s}$.

Доказательство. Оценка снизу поперечника $d_n(\bar{Q}_{r,\gamma,p}(\Omega,M,L_q))$ следует из теоремы 2.4 и того факта, что пространство $Q_{r,\gamma,p}(\Omega,M)$ вкладывается в пространство $\bar{Q}_{r,\gamma,p}(\Omega,M)$. Для получения оценки сверху поперечника $d_n(\bar{Q}_{r,\gamma,p}(\Omega,M,L_q))$ воспользуемся сплайном $f_n(t)$, построенным при доказательстве теоремы 2.4. При этом было показано, что $\|f(t)-f_n(t)\|_{C[-1,1]}\le Bn^{-s}$. Для завершения доказательства осталось повторить рассуждения, приведенные при доказательстве теоремы 2.6.

Теорема 2.8. Пусть $\Omega = [-1,1], p \le 2, q > 2, \gamma -$ целое число. Справедлива оценка $d_n(Q_{r,\gamma,p}(\Omega, M), L_q) \asymp n^{-s-1/2+1/p}$.

Прежде чем приступить к доказательству теоремы 2.8, проведем, следуя работам [41], [43], [58], сведение задачи об оценке сверху поперечника Колмогорова d_n к «конечномерной» задаче вычисления поперечника $d_n(B_p^m, l_q^m)$.

Разобьем сегмент $[-1,1]$ на сегменты $\Delta_l = [t_l, t_{l+1}]$ и $\Delta_l^* = [\tau_{l+1}, \tau_l]$,
$(l = 0, 1, \ldots, 2^k - 1)$, где $t_l = -1 + (l/2^k)^v$, $\tau_l = 1 - (l/2^k)^v$, $l = 0, 1, \ldots, 2^k$, $k = 1, 2, \ldots$, $v = (s - 1/p + 1/q)/(s - 1/p + 1/q - \gamma)$.

Обозначим через $P_s(\varphi, [-1,1])$ полином степени $s-1$, интерполирующий функцию $\varphi(t)$ по узлам полинома Чебышева первого рода. Через $P_s(\varphi, \Delta_l)$ $(P_s(\varphi, \Delta_l^*))$ обозначим полином, полученный из
$P_s(\varphi, [-1,1])$ при аффинном преобразовании $[-1,1]$ на $\Delta_l, (\Delta_l^*)$. Через $\varphi_{2^k}(t)$ обозначим сплайн, который на каждом сегменте $\Delta_l(\Delta_l^*)$ совпадает с полиномом $P_s(\varphi, \Delta_l)$, $(P_s(\varphi, \Delta_l^*))$, $l = 0, 1, \ldots, 2^k - 1$. Из выкладок, приведенных при доказательстве теоремы 2.6, следует, что

$$\| \varphi(t) - \varphi_N(t) \|_{L_q} \leq A 2^{(-s+1/p-1/q)k}.$$

Обозначим через $S_{s2^{(N+1)}}$ пространство всех функций $f(x)$, совпадающих на каждом полуинтервале $(t_k, t_{k+1}], (\tau_{k+1}, \tau_k], k = 0, 1, \ldots, 2^N - 1$ с некоторым многочленом степени $s-1$.

Введем норму

$$\| f \|_{N,\alpha} =$$

$$= \left[\sum_{i=0}^{2^N-1} h_i \sum_{j=0}^{s-1} \left(\left| f\left(-1 + \left(\frac{i}{2^N}\right)^v + j\frac{h_i}{s}\right)\right|^\alpha + \left| f\left(1 - \left(\frac{i+1}{2^N}\right)^v + j\frac{h_i}{s}\right)\right|^\alpha \right) \right]^{1/\alpha},$$

где $1 \leq \alpha < \infty$, $h_i = ((i+1)^v - i^v)/2^{Nv}$, $i = 0, 1, \ldots, 2^N - 1$.

Эта норма превращает множество $S_{s2^{N+1}}$ в банахово пространство $S^\alpha_{s2^{N+1}}$.

Используя [41], докажем следующее утверждение.

Лемма 2.1. Справедливы неравенства

$$A \| f(x) \|_{N,p} \leq \| f(x) \|_{L_p} \leq B \| f(x) \|_{N,p}, \tag{2.9}$$

где числа A и B положительны и зависят только от s и p.

Доказательство. Рассмотрим в пространстве P_s полиномов, определенных на сегменте $[0,1]$, степень которых не превышает $s-1$, две нормы:

$$\|f\|_p = \left[\int_0^1 |f(x)|^p \, dx \right]^{1/p}$$

и

$$\|f\|_{N,p} = \left[\sum_{j=0}^{s-1} |f(j/s)|^p \right]^{1/p}.$$

Они эквивалентны (как и любые две нормы в конечномерном пространстве), т. е.

$$A\|f\|_{N,p} \leq \|f\|_p \leq B\|f\|_{N,p},$$

где константы A и B зависят только от s и p.

Пусть $f(u)-$ полином степени $s-1, u \in (\tau_{k+1}, \tau_k], k = 0, 1, \ldots, 2^N$. (Аналогичные рассуждения проводятся для промежутков $(t_k, t_{k+1}], k =$
$= 0, 1, \ldots, 2^N$). Сделаем в интеграле $\int\limits_{\tau_{k+1}}^{\tau_k} |f(u)|^p \, d\tau$ замену переменной $u = \tau_{k+1} + h_k x$, где $h_k = \tau_k - \tau_{k+1}$. Тогда

$$A^p h_k \sum_{j=0}^{s-1} \left| f\left(\tau_{k+1} + h_k \frac{j}{s}\right) \right|^p \le \int\limits_{\tau_{k+1}}^{\tau_k} |f(u)|^p \, du =$$

$$= h_k \int\limits_0^1 |f(\tau_{k+1} + h_k x)|^p \, dx \le B^p h_k \sum_{j=0}^{s-1} \left| f(\tau_{k+1} + h_k \frac{j}{s}) \right|^p .$$

Следовательно,

$$A^p \sum_{i=0}^{2^N-1} h_i \sum_{j=0}^{s-1} \left(\left| f\left(\tau_{i+1} + h_i \frac{j}{s}\right) \right|^p + \left| f\left(t_i + h_i \frac{j}{s}\right) \right|^p \right) \le$$

$$\le \sum_{i=0}^{2^N-1} \left[\int\limits_{t_i}^{t_{i+1}} |f(u)|^p \, du + \int\limits_{\tau_{i+1}}^{\tau_i} |f(u)|^p \, du \right] \le$$

$$\le B^p \sum_{i=0}^{2^N-1} h_i \sum_{j=0}^{s-1} \left(\left| f\left(\tau_{i+1} + h_i \frac{j}{s}\right) \right|^p + \left| f\left(t_i + h_i \frac{j}{s}\right) \right|^p \right),$$

т. е. $A\|f(u)\|_{N,p} \le \|f(u)\|_{L_p} \le B\|f(u)\|_{N,p}$.

Лемма доказана.

Лемма 2.2. Любая функция $\varphi(x) \in Q_{r,\gamma,p}([-1,1], M)$ представима в виде равномерно на $[-1,1]$ сходящегося ряда

$$\varphi(x) = \sum_{i=0}^{\infty} f_k(x), x \in [-1,1], \tag{2.10}$$

где $f_k \in S_{s2^{k+1}}$ и $\|f_k\|_{L_q} \le A2^{k(-s+1/p-1/q)}$, $\|f_k\|_{L_p} \le A2^{-ks}$; $A-$ положительная постоянная, зависящая только от r, γ и p.

Доказательство. Выше каждой функции $\varphi(x) \in Q_{r,\gamma,p}(\Omega, M)$ был поставлен в соответствие сплайн $\varphi_{2^k}(x)$, такой, что

$$\|\varphi(x) - \varphi_{2^k}(x)\|_{L_q} \le A2^{k(-s+1/p-1/q)}.$$

Полагая $f_0(t) = \varphi_1(t)$ и $f_n(t) = \varphi_{2^n}(t) - \varphi_{2^{n-1}}(t)$, получаем представление функции $\varphi(t)$ в виде ряда (2.10).

Очевидно

$$\|f_n(t)\|_{L_q} \le \|\varphi(t) - \varphi_{2^n}(t)\|_{L_q} + \|\varphi(t) - \varphi_{2^{n-1}}(t)\|_{L_q} \le A2^{-n(-s+1/p-1/q)}.$$

Лемма доказана.

Лемма 2.3. Пусть $s > 1/p - 1/q, n, n_k$– целые неотрицательные числа, удовлетворяющие условию $\sum\limits_{k=0}^{\infty} n_k \le n$. Тогда

$$d_n(Q_{r,\gamma,p}([-1,1], M), L_q) \le A \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-sk} d_{n_k}(B_p^{s2^{2k}}, L_q^{s2^{2k}}), \tag{2.11}$$

где A зависит только от p, q, s.

Доказательство. Банахово пространство $S^p_{s2^{N+1}}$ изоморфно и изометрично пространству $l_p^{s2^{N+1}}$. Согласно определению n_N-поперечника для любого $\varepsilon > 0$ существует такое n_N-мерное подпространство $L_{n_N} \subset$
$\subset S_{s2^{N+1}}$, что

$$d(B(S^p_{s2^{N+1}}), L_{n_N}, S^q_{s2^{N+1}}) \le d_{n_N}(B_p^{s2^{N+1}}, L^q_{s2^{N+1}}) + \varepsilon, \tag{2.12}$$

где $B(S^p_{s2^{N+1}})$– единичный шар пространства $S^p_{s2^{N+1}}$, через B_p^n обозначается множество $B(l_p^n)$. Напомним, что

$$d(K, L_n, L) = \sup_{x \in K} \quad d(x, L_n, L), d(x, L_n, L) = \inf(\|x - y\|_L : y \in L_n).$$

Положим $L_n = \sum\limits_k L_{n_k}$. Тогда dim $L_n \le n$ и можно считать, что dim $L_n = n$. Оценим отклонение произвольной функции $\varphi(t) \in$
$\in Q_{r,\gamma,p}([-1,1], M)$ от L_n в метрике пространства L_q.

Из неравенства (2.12) следует, что для каждой функции f_k из разложения (2.10) существует такая функция $f_{n_k} \in L_{n_k}$, что

$$\|f_k - f_{n_k}\|_{k,q} \le A\|f_k\|_{k,p} d_{n_k}(B_p^{s2^{k+1}}, l_q^{s2^{k+1}}) + \varepsilon.$$

Применяя лемму 2.2, перепишем это неравенство в виде:

$$\|f_k - f_{n_k}\|_{k,q} \le A\|f_k\|_p d_{n_k}(B_p^{s2^{k+1}}, l_q^{s2^{k+1}}) + \varepsilon.$$

Воспользовавшись оценкой $\|f_k\|_p$, приведенной в лемме 2.2, имеем:

$$\|f_k - f_{n_k}\| \le A2^{-sk}(d_{n_k}(B_p^{s2^{k+1}}, l_q^{s2^{k+1}}) + \varepsilon).$$

Положим $\overline{\varphi}(t) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} f_{n_k}(t)$, причем сумма содержит лишь конечное число ненулевых функций. Тогда

$$\| \varphi(t) - \overline{\varphi}(t) \| \leq A \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-sk} (d_{n_k}(B_p^{s2^{2k}}, l_q^{s2^{2k}}) + \varepsilon).$$

Из произвольности ε следует неравенство (2.11).
Лемма доказана.

Доказательство теоремы 2.8. Оценка снизу поперечника $d_n(Q_{r,\gamma,p}(\Omega, M), L_q)$ была получена в теореме 2.5.

Оценим сверху величину поперечника d_n. Положим

$$n_k = \begin{cases} s2^i & \text{при } i < [\mu \log_2 n], \\ s2^{[\mu \log_2 n]} & \text{при } [\mu \log_2 n] \leq i \leq [w \log_2 n], \\ 0 & \text{при } i > [w \log_2 n], \end{cases}$$

где $\mu = (s - 1/p + 1/2)/(s + 1/2), w = (s - 1/p + 1/2)/(s - 1/p + 1/q)$.

Ниже потребуется следующая оценка сверху поперечника Колмогорова:

$$d_n(B_2^m, l_\infty^m) \leq A n^{-1/2} \left(1 + \ln \frac{m}{n}\right)^{3/2},$$

приведенная в теореме 1.9.

Из леммы 2.3 следует, что

$$d_n(Q_{r,\gamma,p}(\Omega, M), L_q) \leq \sum_1 + \sum_2 =$$

$$= A \sum_{i=[\mu \log_2 n]}^{[w \log_2 n]} 2^{-is} d_{n_i} \left(B_p^{sn_i}, l_q^{sn_i}\right) + A \sum_{i=[w \log_2 n]+1}^{\infty} 2^{-i(s-1/p+1/q)}.$$

Оценим каждую из этих сумм в отдельности.

Очевидно

$$\sum_2 = A \sum_{i=[w \log_2 n]+1}^{\infty} 2^{-i(s-1/p+1/q)} \leq A n^{-w(s-1/p+1/q)} \leq A n^{-s+1/p-1/2}.$$

Приступим к оценке $\sum\limits_1$, полагая вначале, что $q = \infty$. Так как

$$d_n(B_p^m, l_\infty^m) \leq d_n(B_2^m, l_\infty^m),$$

то

$$\sum_1 = A \sum_{i=[\mu \log_2 n]}^{[w \log_2 n]} 2^{-is} d_{n_i}(B_p^{sn_i}, l_\infty^{sn_i}) \leq$$

$$\leq A2^{-[\mu \log_2 n](s+1/2)} \leq An^{-s+1/p-1/2}.$$

Учитывая, что $d_n(Q_{r,\gamma,p}(\Omega, M), L_q) \leq d_n(Q_{r,\gamma,p}(\Omega, M), L_\infty)$, имеем:

$$\sum_1 = An^{-s+1/p-1/2}.$$

Оценим сумму

$$\sum_{i=1}^{[w \log_2 n]} n_i \leq A \sum_{i=1}^{[\mu \log_2 n]} 2^i + An^\mu \log_2 n \leq An^\mu \log_2 n \leq An.$$

Из полученных выше оценок следует, что

$$d_n(Q_{r,\gamma,p}(\Omega, M), L_q) \leq An^{-s+1/p-1/2}.$$

Сопоставлением оценок снизу и сверху завершается доказательство теоремы.

Теорема 2.9. Пусть $\Omega = [-1, 1], 2 \leq p \leq q, \gamma-$ целое число. Справедлива оценка

$$d_n(Q_{r,\gamma,p}(\Omega, M), L_q) \asymp n^{-s}.$$

Доказательство. В работе [41, с. 110] показано, что при $2 \leq$ $\leq p \leq q \leq \infty$ для любого компакта $X \subset B$, где $B-$ банахово пространство, справедливы

$$d_n(X, L_p) \leq d_n(X, L_q) \leq d_n(X, L_\infty).$$

Поэтому

$$d_n(Q_{r,\gamma,p}(\Omega, M), L_p) \leq d_n(Q_{r,\gamma,p}(\Omega, M), L_q) \leq$$
$$\leq d_n(Q_{r,\gamma,p}(\Omega, M), L_\infty).$$

Так как множество функций $Q_{r,\gamma,p}(\Omega, M) \subset Q_{r,\gamma,2}(\Omega, M_1)$, где M_1 и M связаны неравенством $M_1 \leq M2^{(p-2)/2p}$, то

$$d_n(Q_{r,\gamma,p}(\Omega, M), L_\infty) \leq d_n(Q_{r,\gamma,2}(\Omega, M), L_\infty).$$

В теореме 2.5 показано, что $d_n(Q_{r,\gamma,p}(\Omega, M), L_p) \geq An^{-s}$, а в теореме 2.7 установлено

$$d_n(Q_{r,\gamma,2}(\Omega, M), L_\infty) \leq An^{-s}.$$

Таким образом, $d_n(Q_{r,\gamma,p}(\Omega, M), L_q) \asymp n^{-s}$. Теорема доказана.

Резюмируя утверждения теорем этого раздела, имеем:

$$d_n(Q_{r,\gamma,p}([-1, 1], M), L_q) \asymp \begin{cases} n^{-s+1/p-1/q} & \text{при } p < q \leq 2, \\ n^{-s+1/p-1/2} & \text{при } p \leq 2, q > 2, \\ n^{-s} & \text{при } p \geq q, 2 < p < q. \end{cases}$$

3. Поперечники на классе $\mathbf{Q_{r,\gamma,p}([-1,1]^l, M)}$ функций многих переменных

Теорема 3.1. Пусть $\Omega = [-1,1]^l, l \geq 2$. Тогда справедлива оценка

$$\delta_n(Q_r(\Omega, M)) \asymp d_n((Q_r(\Omega, M)), C) \asymp n^{-r/(l-1)}.$$

Доказательство. Обозначим через Δ_k множество точек $x = (x_1, \ldots, x_l)$ из Ω, расстояние от которых до границы Γ области Ω удовлетворяет неравенствам $(k/N)^v \leq d(x, \Gamma) \leq ((k+1)/N)^v$, где $v = (2r+1)/r$. В каждой области Δ_k разместим кубы $\Delta^k_{i_1,\ldots,i_l}$, ребра которых равны $h_k = ((k+1)/N)^v - (k/N)^v$ и параллельны координатным осям. Общее число кубов, которые можно разместить в области Ω, оценивается неравенствами

$$1+m\sum_{k=0}^{N-1}\left[\frac{2(N^v-(k+1)^v)}{(k+1)^v-k^v}\right]^{l-1} \leq n \leq 1+m\sum_{k=0}^{N-1}\left(\left[\frac{2(N^v-k^v)}{(k+1)^v-k^v}\right]+1\right)^{l-1},$$

где $m-$ число граней куба Ω; $[\alpha]-$ целая часть числа α.

Нетрудно видеть, что

$$\sum_{k=0}^{N-1}(N^v k^{1-v}-k)^{l-1} = \sum_{k=0}^{N-1}\sum_{j=0}^{l-1}(-1)^j C^j_{l-1}(N^v k^{1-v})^{l-1-j}k^j =$$

$$= A\begin{cases} N^{v(l-1)} & \text{при } v > l/(l-1), \\ N^l & \text{при } v < l/(l-1), \\ N^l \ln N & \text{при } v = l/(l-1). \end{cases}$$

Отсюда следует, что

$$n \asymp \begin{cases} N^{v(l-1)} & \text{при } v > l/(l-1), \\ N^l & \text{при } v < l/(l-1), \\ N^l \ln N & \text{при } v = l/(l-1). \end{cases} \tag{3.1}$$

То обстоятельство, что в каждой области Δ_k может оказаться не более

$$2^l\left(\left[\frac{N^v-k^v}{(k+1)^v-k^\tau}\right]+1\right)^{l-2}$$

параллелепипедов, у которых длина по крайней мере одного ребра больше h_k, не влияет на общность рассуждений.

Пусть $\Delta^k_{i_1,\ldots,i_l} = [b^k_{i_1}, b^k_{i_1+1}; \ldots; b^k_{i_l}, b^k_{i_l+1}]$.

Введем функцию

$$\psi^k_{i_1,\ldots,i_l}(x_1,\ldots,x_l) =$$

$$
= \begin{cases} A\frac{(x_1-b^k_{i_1})^{2r+1}(b^k_{i_1+1}-x_1)^{2r+1}\dots(x_l-b^k_{i_l})^{2r+1}(b^k_{i_l+1}-x_l)^{2r+1}}{h_k^{(2r+1)(2l-1)}((k+1)/N)^{(2r+1)(r+1)/r}} & \text{при } x \in \Delta^k_{i_1,\dots,i_l}; \\ 0 & \text{при } x \in \Omega\backslash\Delta^k_{i_1,\dots,i_l}, \end{cases}
$$

где константа A подбирается из требования, чтобы $\psi^k_{i_1,\dots,i_l}(x_1,\dots,x_l) \in$ $\in Q_r(\Omega, M)$. Нетрудно видеть, что такая константа существует и не зависит от индексов k и $i_1,\dots,i_l$.

Через $\psi(x_1,\dots,x_l)$ обозначим функцию, определенную в кубе Ω и составленную из полиномов $\psi^k_{i_1,\dots,i_l}(x_1,\dots,x_l)$. Максимальное значение функции $\psi(x_1,\dots,x_l)$ в каждом кубе $\Delta^k_{i_1,\dots,i_l}$ больше или равно $BN^{-(2r+1)} = Bn^{-r/(l-1)}$, где $B-$ константа, не зависящая от индексов $k, i_1,\dots,i_l$. Таким образом, в кубе Ω расположено $n \asymp AN^{v(l-1)}$ кубов $\Delta^k_{i_1,\dots,i_l}$, в каждом из которых функция $\psi(x_1,\dots,x_l)$ принимает максимальное значение, большее или равное $Bn^{-r/(l-1)}$.

Обозначим через $\xi(x)$ линейную комбинацию

$$
\xi(x) = \sum_{k;i_1,\dots,i_l} c^k_{i_1,\dots,i_l}\psi^k_{i_1,\dots,i_l},
$$

где $|c^k_{i_1,\dots,i_l}| \le 1$.

В предыдущей формуле суммирование проводится по всем n кубам $\Delta^k_{i_1,\dots,i_l}$, размещенным в кубе Ω.

Семейство $\xi(x)$ образует n-параллелепипед, причем $\xi(x) \in Q_r(\Omega, M)$.

Повторяя рассуждения, приведенные при доказательстве теоремы 2.1, получаем оценку:

$$
\delta_n(Q_r(\Omega, M)) \ge \frac{A}{N^s} \ge \frac{A}{n^{r/(l-1)}}, \tag{3.2}
$$

где n и N связаны соотношением (3.1), $s = 2r+1$. Оценка снизу поперечника Бабенко получена.

Построим сплайн $f(t_1,\dots,t_l)$, реализующий эту оценку. Выше было описано разбиение куба Ω на области Δ_k. Воспользуемся этим разбиением. Построение сплайна начнем с куба Δ_{N-1}. В этом кубе функцию $f(t_1,\dots,t_l)$ аппроксимируем интерполяционным полиномом

$$
f_N(t_1,\dots,t_l; \Delta_{N-1}) = P_{2r+1,\dots,2r+1}f(t_1,\dots,t_l).
$$

Здесь $P_{2r+1,\dots,2r+1} = P^{t_1}_{2r+1}\dots P^{t_l}_{2r+1}$; через $P^{t_i}_{2r+1}$ обозначен многочлен

$$
P_{2r+1}\left(t_i, \left[-1 + \left(\frac{N-1}{N}\right)^v, 1 - \left(\frac{N-1}{N}\right)^v\right]\right),
$$

построенный при доказательстве теоремы 2.1 и действующий по переменной t_i, $i = 1, 2, \ldots, l$.

Перейдем к области Δ_{N-2}. Эта область разбивается на кубы $\Delta^{N-2}_{i_1,\ldots,i_l}$, причем разбиение происходит таким образом, чтобы вершины куба Δ_{N-1} входили в число точек разбиения. В каждом из кубов $\Delta^{N-2}_{i_1,\ldots,i_l}$ полином $f_N(t_1, \ldots, t_l; \Delta^{N-2}_{i_1,\ldots,i_l})$ определяется формулой

$$f_N(t_1, \ldots, t_l; \Delta^{N-2}_{i_1,\ldots,i_l}) = P_{2r+1,\ldots,2r+1}\overline{f}(t_1, \ldots, t_l),$$

где функция $\overline{f}(t_1, \ldots, t_l)$ равна $f(t_1, \ldots, t_l)$ во всех узлах интерполирования, кроме тех, которые расположены на гранях куба Δ_{N-1}. В этих узлах значения $\overline{f}(t_1, \ldots, t_l)$ полагаются равными значениям полинома $P_{2r+1,\ldots,2r+1}f(t_1, \ldots, t_l; \Delta_{N-1})$.

Описанным образом проводится аппроксимация во всех областях Δ_i при $i \geq 0$. Полученный при этом сплайн обозначим через $f_N(t_1, \ldots, t_l)$.

Нетрудно видеть, что сплайн $f_N(t_1, \ldots, t_l)$ непрерывен в Ω, имеет размерность $n = AN^{(2r+1)(l-1)/r}$, и что справедлива оценка

$$\|f(t_1, \ldots, t_l) - f_N(t_1, \ldots, t_l)\|_C \leq AN^{-(2r+1)} = An^{-r/(l-1)}.$$

Следовательно,

$$d_n(Q_r(\Omega, M), C) \leq An^{-r/(l-1)}. \tag{3.3}$$

Замечание. При построении непрерывного локального сплайна были введены дополнительные (по сравнению с первоначальным разбиением) кубы. Общее число дополнительных кубов не превышает $2^l n$, где $n-$ число кубов, определяемое формулой (3.1). Таким образом, дополнительное построение не влияет на полученные оценки.

Из полученных выше оценок (3.2),(3.3) и неравенства $\delta_{2n+1}(X) \leq$ $\leq 2d_n(X, B)$ следует справедливость теоремы.

Теорема 3.2. Пусть $\Omega = [-1, 1]^l, l \geq 2$. Справедливы оценки

$$d_n(Q_{r,\gamma}(\Omega, M), C) \asymp \delta_n(Q_{r,\gamma}(\Omega, M)) \asymp$$
$$\asymp \begin{cases} n^{-(s-\gamma)/(l-1)} & \text{при } v > l/(l-1), \\ n^{-s/l}(\ln n)^{s/l} & \text{при } v = l/(l-1), \\ n^{-s/l} & \text{при } v < l/(l-1), \end{cases} \tag{3.4}$$

где $v = s/(s-\gamma)$.

Доказательство. Вначале оценим снизу величину $\delta_n(Q_{r,\gamma}(\Omega, M))$. Обозначим через Δ_k множество точек $x = (x_1, \ldots, x_l) \in \Omega$, расстояние $d(x, \Gamma)$ от которых до границы Γ области Ω удовлетворяет неравенствам $(k/N)^v \leq d(x, \Gamma) \leq ((k+1)/N)^v$, где $v = s/(s-\gamma)$.

Как и при доказательстве теоремы 3.1 разбиваем области Δ_k на кубы $\Delta^k_{i_1,\ldots,i_l}$, где $\Delta^k_{i_1,\ldots,i_l} = [b^k_{i_1}, b^k_{i_1+1}; \ldots; b^k_{i_l}, b^k_{i_l+1}]$. Введем функцию

$$\psi^k_{i_1,\ldots,i_l}(x_1,\ldots,x_l) =$$

$$= \begin{cases} A\frac{((x_1-b^k_{i_1})(b^k_{i_1+1}-x_1)\ldots(x_l-b^k_{i_l})(b^k_{i_l+1}-x_l))^s}{h_k^{s(2l-1)}((k+1)/N)^{v\gamma}} & \text{при}\, x \in \Delta^k_{i_1,\ldots,i_l}, \\ 0 & \text{при}\, x \in \Omega\backslash\Delta^k_{i_1,\ldots,i_l}. \end{cases}$$

Константа A подбирается из требования, чтобы

$$\psi^k_{i_1,\ldots,i_l}(x_1,\ldots,x_l) \in Q_{r,\gamma}(\Omega, M).$$

Можно показать, что такая константа существует и что она не зависит от индексов k, $i_1,\ldots,i_l$. Обозначим через $\psi(x_1,\ldots,x_l)$ функцию, определенную в кубе Ω и совпадающую с функцией $\psi^k_{i_1,\ldots,i_l}(x_1,\ldots,x_l)$ в каждом квадрате $\Delta^k_{i_1,\ldots,i_l}$.

Максимальное значение функции $\psi(x_1,\ldots,x_l)$ в каждом кубе $\Delta^k_{i_1,\ldots,i_l}$ равно BN^{-s}. Учитывая соотношение (3.1), получаем оценку снизу поперечника Бабенко, выражаемую правой частью соотношения (3.4).

Сплайн, реализующий эту оценку, строится аналогично сплайну $f_N(x_1,\ldots,x_l)$ (отличие заключается в том, что в данном случае $v =$
$= s/(s-\gamma)$ вместо $v = (2r+1)/r$). В случае, когда $\gamma-$ целое число, повторяя рассуждения, приведенные при доказательстве теоремы 3.1, приходим к оценке:

$$\|f(x_1,\ldots,x_l) - f_N(x_l,\ldots,x_l)\|_C \le AN^{-s}.$$

Рассмотрим случай, когда $\gamma-$ нецелое число. Нетрудно видеть, что при $x \in \Delta^k_{i_1,\ldots,i_l}$, $k \ne 0$, справедлива оценка

$$\|f(x) - f_N(x)\|_{C(\Delta^k_{i_1,\ldots,i_l})} \le AN^{-s}.$$

При $k = 0$, справедлива оценка

$$\|f(x) - f_N(x)\|_{C(\Delta^0_{i_1,\ldots,i_l})} \le AE_{s-1,\ldots,s-1}(f, \Delta^0_{i_1,\ldots,i_l})\lambda^l_s,$$

где $E_{s,\ldots,s}(f, \Delta^0_{i_1,\ldots,i_l})-$ наилучшее приближение функции $f(x_1,\ldots,x_l)$ полиномами степени не выше s по каждой переменной x_i, $i =$
$= 1, 2, \ldots, l$, в квадрате $\Delta^p_{i_1,\ldots,i_l}$; λ_s- константа Лебега. Для оценки $E_{s-1,\ldots,s-1}(f^s, \Delta^0_{i_1,\ldots,i_l})$ воспользуемся формулой Тейлора для функций многих переменных с остаточным членом в интегральной форме [65].

Напомним эту формулу:

$$f(x_1,\dots,x_l)=\sum_{k=0}^{r}\frac{1}{k!}\sum_{j_1=1}^{l}\cdots\sum_{j_k=1}^{l}(x_{j_1}-x^0_{j_1})\cdots(x_{j_k}-x^0_{j_k})\frac{\partial^k f(x^0)}{\partial x_{j_1}\cdots\partial x_{j_k}}+$$

$$+R_{r+1}(x), \tag{3.5}$$

где

$$R_{r+1}(x)=\frac{1}{r!}\int\limits_0^1(1-u)^r\sum_{j_1=1}^{l}\cdots\sum_{j_{r+1}=1}^{l}(x_{j_1}-x^0_{j_1})\cdots$$

$$\cdots(x_{j_{r+1}}-x^0_{j_{r+1}})\frac{\partial^{r+1}f(x^0+u(x-x^0))}{\partial x_{j_1}\cdots\partial x_{j_{r+1}}}du=$$

$$=l\sum_{|k|=r+1}\frac{(x-x^0)^k}{k!}\int\limits_0^1(1-u)^r f^{(k)}(x^0+u(x-x^0))du. \tag{3.6}$$

Из этой формулы следует, что

$$E_{s,\dots,s}(f,\Delta^p_{i_1,\dots,i_l})\le\frac{B}{s!}h_0^{r+\zeta}\le BN^{-s}.$$

Таким образом, в случае, когда $\gamma-$ нецелое число, справедлива оценка

$$\|f(x)-f_N(x)\|_{C(\Omega)}\le BN^{-s}.$$

Следовательно, $d_n\le AN^{-s}$; учитывая (3.1), получаем вторую часть соотношения (3.4).

Завершается доказательство теоремы сравнением оценок снизу и сверху для поперечников Бабенко и Колмогорова и использованием соотношения $\delta_{2n+1}\le 2d_n$.

Теорема 3.3. Пусть $\Omega=[-1,1]^l$, $l\ge 2$. Справедливы оценки

$$d_n(\bar Q_{r,\gamma}(\Omega,M),C)\asymp$$

$$\asymp\delta_n(\bar Q_{r,\gamma}(\Omega,M))\asymp\begin{cases} n^{-s/l}(\ln n)^{s/l} & \text{при}\quad v=l/(l-1),\\ n^{-s/l} & \text{при}\quad v<l/(l-1),\end{cases}$$

где $v=s/(s-\gamma)$.

Доказательство. Неравенство

$$\delta_n(\bar Q_{r,\gamma}(\Omega,M))\ge A\begin{cases} n^{-s/l}(\ln n)^{s/l} & \text{при}\quad v=l/(l-1),\\ n^{-s/l} & \text{при}\quad v<l/(l-1)\end{cases} \tag{3.7}$$

следует из теоремы 3.2, так как множество функций $\bar{Q}_{r,\gamma}(\Omega, M)$ вкладывается в множество функций $Q_{r,\gamma}(\Omega, M)$.

Построим непрерывный локальный сплайн, точность которого определена правой частью формулы (3.7).

Покроем область Ω кубами $\Delta^k_{i_1,\ldots,i_l}$, $k = 0, 1, \ldots, N-1$, повторяя рассуждения, приведенные при доказательстве теоремы 3.1. Кубы $\Delta^0_{i_1,\ldots,i_l}$ покроем более мелкими кубами $\Delta^0_{i_1,\ldots,i_l,j_1,\ldots,j_l}$, которые строятся следующим образом. В кубе $\Delta^0_{i_1,\ldots,i_l}$ разделим каждое ребро на $M(M = [\ln N])$ равных частей и через точки деления проведем плоскости, параллельные соответствующим координатным плоскостям. В результате куб $\Delta^0_{i_1,\ldots,i_l}$ оказывается покрытым M^l кубами $\Delta^0_{i_1,\ldots,i_l,j_1,\ldots,j_l}$. В каждом кубе $\Delta^0_{i_1,\ldots,i_l,j_1,\ldots,j_l}$, $\Delta^k_{i_1,\ldots,i_l}$, $k = 1, 2, \ldots, N-1$ функция $f(x_1, \ldots, x_l)$ аппроксимируется интерполяционным полиномом $P_{s\cdots s}(f, \Delta^0_{i_1,\ldots,i_l,j_1,\ldots,j_l})$, $P_{s\cdots s}(f, \Delta^k_{i_1,\ldots,i_l})$, $k = 1, 2, \ldots, N-1$, построенным при доказательстве теоремы 3.1. Сплайн, определенный в области Ω и составленный из интерполяционных полиномов $P_{s\cdots s}(f, \Delta^0_{i_1,\ldots,i_l,j_1,\ldots,j_l})$, $P_{s\cdots s}(f, \Delta^k_{i_1,\ldots,i_l})$, $k = 1, 2, \ldots, N-1$, обозначим через $f_N(x_1, \ldots, x_l)$.

Оценим точность аппроксимации функции $f(x_1, \ldots, x_l)$ сплайном $f_N(x_1, \ldots, x_l)$. При этом в отдельности рассмотрим аппроксимацию в кубах Δ^0 и Δ^k, $k = 1, 2, \ldots, N-1$.

Так как при $k \geq 1$ при оценке точности интерполяции используются производные до s-го порядка, то в данном случае оценка

$$\|f(x) - f_N(x)\|_{C(\Delta^k_{i_1,\ldots,i_l})} \leq BN^{-s}, \tag{3.8}$$

полученная при доказательстве теоремы 3.2, справедлива при всех $1 \leq k \leq N-1$.

Пусть $k = 0$. В этом случае справедлива оценка

$$\|f(x) - f_N(x)\|_{C(\Delta^0_{i_1,\ldots,i_l,j_1,\ldots,j_l})} \leq$$

$$\leq BE_{r-1,\ldots,r-1}(f, \Delta^0_{i_1,\ldots,i_l,j_1,\ldots,j_l})\lambda^l_r.$$

Воспользовавшись формулой Тейлора с остаточным членом в интегральной форме (см. формулы (3.5) и (3.6)), имеем:

$$E_{r-1,\ldots,r-1}(f, \Delta^0_{i_1,\ldots,i_l,j_1,\ldots,j_l}) \leq B\left(\frac{h_0}{M}\right)^r \left|\ln\left(\frac{h_0}{M}\right)\right| \leq$$

$$\leq B\left(\frac{1}{NM}\right)^{vr} \ln(NM) \leq BN^{-s}.$$

Следовательно,

$$\|f(x)-f_N(x)\|_{C(\Delta^0_{i_1,\ldots,i_l,j_1,\ldots,j_l})}\le BN^{-s}. \qquad (3.9)$$

Из оценок (3.5) и (3.6) следует, что

$$\|f(x)-f_N(x)\|_{C(\Omega)}\le BN^{-s}.$$

Оценим число узлов m, используемых при построении сплайна $f_N(x)$. Общее число n кубов $\Delta^k_{i_1,\ldots,i_l}$ оценено формулой (3.1). При этом число кубов $\Delta^0_{i_1,\ldots,i_l}$ есть величина $O(N^{v(l-1)})$. Каждый куб $\Delta^0_{i_1,\ldots,i_l}$ был разделен на M^l более мелких кубов $\Delta^0_{i_1,\ldots,i_l,j_1,\ldots,j_l}$. Таким образом, общее число кубов, осуществляющих покрытие куба Ω, равно $O(M^lN^{v(l-1)}+$
$+N^l\ln N)$ при $v<l/(l-1)$ и $O(M^lN^{v(l-1)}+N^l)$ при $v=l/(l-1)$.

Отсюда и из оценок (3.8) и (3.9) имеем

$$d_m(\bar Q_{r,\gamma}(\Omega,M),C)\le\|f(x)-f_N(x)\|_{C(\Omega)}\le$$

$$\le\begin{cases} m^{-s/l}(\ln m)^{s/l} & \text{при } v=l/(l-1),\\ m^{-s/l} & \text{при } v<l/(l-1).\end{cases}$$

Сопоставляя эту оценку с оценкой снизу поперечника Бабенко, выраженной неравенством (3.7), завершаем доказательство теоремы.

Теорема 3.4. Пусть $\Omega=[-1,1]^l$, $l\ge2$, $v=s/(s-\gamma)$. Справедливы оценки

$$\delta_n(\bar Q_{r,\gamma}(\Omega,M))\asymp d_n(\bar Q_{r,\gamma}(\Omega,M))\asymp n^{-r/(l-1)}\ln n. \qquad (3.10)$$

Доказательство. Вначале оценим снизу величину поперечника $\delta_n(\bar Q_{r,\gamma}(\Omega,M))$.

Пусть $N-$ натуральное число. Обозначим через Δ_0 множество точек x, $x=(x_1,\ldots,x_l)$, расстояние $d(x,\Gamma)$ от которых до границы Γ области Ω удовлетворяет неравенствам $0\le d(x,\Gamma)\le N^{-v}$, а через Δ_1 множество точек x, для которых $N^{-v}\le d(x,\Gamma)\le(\ln^{1/s}N/N)^v$. Обозначим через Δ_k множество точек x, расстояние от которых до границы Γ области Ω удовлетворяет неравенствам $((k-1)\ln^{1/s}N/N)^v\le\le d(x,\Gamma)\le(k\ln^{1/s}N/N)^v$, $k=2,3,\ldots,M-1$, $M=[N/\ln^{1/s}N]$.

Обозначим через Δ_M множество точек x, для которых
$(M-1)\ln^{1/s}N/N)^v\le d(x,\Gamma)\le1$.

Введем следующие обозначения: $h_0 = N^{-v}$; $h_1 = (\ln^{1/s} N/N)^v - N^{-v}$;
$h_k = (k \ln^{1/s} N/N)^v - ((k-1) \ln^{1/s} N/N)^v$, $k = 2, 3, \dots, N$; $h_{M+1} = 1 - (M \ln^{1/s} N/N)^v$.

Покроем каждую из областей Δ_k, $k = 0, 1, \dots, M-1$, кубами с ребрами, равными h_k соответственно, с гранями, параллельными координатным плоскостям.

Так как покрыть области Δ_k, $k = 0, 1, \dots, M-1$, только кубами с длиной ребер h_k не всегда возможно, то наряду с кубами допускается использование параллелепипедов, длины ребер которых лежат в сегменте $[h_k, 2h_k]$, а грани параллельны координатным плоскостям. Кубы и параллелепипеды, осуществляющие описанное выше покрытие каждой из областей Δ_k, $k = 0, 1, \dots, M$, обозначим через $\Delta^{\varkappa}_{i_1,\dots,i_l}$, $k = 0, 1, 2, \dots, M$.

Оценим число n^* элементов $\Delta^{\varkappa}_{i_1,\dots,i_l}$, $k = 0, 1, 2, \dots, M$, покрытия области Ω. Это число складывается из числа n_0^* кубов $\Delta^0_{i_1,\dots,i_l}$, покрывающих область Δ_0, n_1^* кубов $\Delta^1_{i_1,\dots,i_l}$, покрывающих область Δ_1 и n_σ^* кубов $\Delta^{\varkappa}_{i_1,\dots,i_l}$, покрывающих область $\Omega \backslash (\Delta_0 \cup \Delta_1)$. Нетрудно видеть, что $n_0^* \asymp N^{v(l-1)}$, $n_1^* \asymp N^{v(l-1)} / \ln^{(l-1)/s} N$, $n_\sigma^* \asymp N^{v(l-1)} / \ln^{(l-1)/s} N$.

Следовательно,

$$n^* \asymp N^{v(l-1)}. \tag{3.11}$$

Пусть $r \geq 2l$. Кубу $\Delta^0_{0,\dots,0}$($\Delta^0_{0,\dots,0} = [a_1, b_1; \dots; a_l, b_l]$) поставим в соответствие функцию

$$\varphi(x, \Delta^0_{0,\dots,0}) =$$

$$= \begin{cases} B(x_1 - a_1)(b_1 - x_1) \cdots (x_l - a_l)(b_l - x_l) \frac{\ln N}{N^{2l-1}} & \text{при } x \in \Delta^0_{0,\dots,0}, \\ 0 & \text{при } x \in \Omega \backslash \Delta^0_{0,\dots,0}. \end{cases}$$

Константа B подбирается из условия, чтобы $\varphi(x, \Delta^0_{0,\dots,0}) \in \bar{Q}_{r,\gamma}(\Omega, M)$. Нетрудно видеть, что такая константа существует.

Аналогичным образом определяются и все остальные функции $\varphi(x, \Delta^0_{i_1,\dots,i_l})$. При этом следует отметить, что в определении всех этих функций сохраняется одна и та же константа B.

В кубе $\Delta^1_{0,\dots,0}$($\Delta^1_{0,\dots,0}) = [a_1, b_1; \dots; a_l, b_l]$) определим функцию $\varphi(x, \Delta^1_{0,\dots,0})$ по формуле

$$\varphi(x, \Delta^1_{0,\dots,0}) =$$

$$= \begin{cases} B\frac{((x_1-a_1)(b_1-x_1)\cdots(x_l-a_l)(b_l-x_l))^s}{h_1^{s(2l-1)}h_0^\gamma} & \text{при} \quad x \quad \in \Delta^1_{0,\ldots,0}, \\ 0 & \text{при} \quad x \quad \in \Omega\backslash\Delta^1_{0,\ldots,0}. \end{cases}$$

Константа B выбирается из условия $\varphi(x,\Delta^1_{0,\ldots,0}) \in \bar{Q}_{r,\gamma}(\Omega, M)$. Нетрудно видеть, что такая константа существует.

Аналогичным образом каждому кубу $\Delta^1_{i_1,\ldots,i_l}$ ставится в соответствие функция $\varphi(x,\Delta^1_{i_1,\ldots,i_l})$. При этом константа B не зависит от индексов $i_1,\ldots,i_l$.

Возьмем произвольный куб $\Delta^u_{w_1,\ldots,w_l} = [a^u_{w_1}, a^u_{w_1+1};\ldots;a^u_{w_l}, a^u_{w_l+1}]$ из множества кубов $\Delta^k_{i_1,\ldots,i_l}$, $k=2,\ldots,M$.

Поставим в соответствие кубу $\Delta^u_{w_1,\ldots,w_l}$ функцию

$$\varphi(x,\Delta^u_{w_p,\ldots,w_l}) =$$

$$= \begin{cases} B\frac{((x_1-a^u_{w_1})(a^u_{w_1+1}-x_1)\cdots(x_l-a^u_{w_l})(a^u_{w_l+1}-x_l))^s}{h_u^{s(2l-1)}(h_u^*)^\gamma} & \text{при } x \in \Delta^u_{w_1,\ldots,w_l}; \\ 0 & \text{при } x \in \Omega\backslash\Delta^u_{w_1,\ldots,w_l}. \end{cases}$$

Здесь $h_u^* = d(\Delta_u, \Gamma)-$ расстояние от области Δ_u до границы Γ куба Ω, а константа B выбирается таким образом, чтобы $\varphi(x,\Delta^u_{w_1,\ldots,w_l}) \in$ $\in \bar{Q}_{r,\gamma}(\Omega, M)$. Очевидно, такая константа существует.

По аналогии с построенной выше функцией $\varphi(x,\Delta^u_{w_1,\ldots,w_l})$ каждому кубу $\Delta^k_{i_1,\ldots,i_l}$ ставится в соответствие функция $\varphi(x,\Delta^k_{i_1,\ldots,i_l})$, $k =$ $= 1,2,\ldots,M$. При этом константа B не зависит от индексов $(k,i_1,\ldots,i_l)$.

Оценим снизу максимальные значения, достигаемые функциями $\varphi(x,\Delta^0_{i_1,\ldots,i_l})$, $\varphi(x,\Delta^1_{i_1,\ldots,i_l})$, $k=1,2,\ldots,M$.

Оценим снизу максимальное значение функции $\varphi(x,\Delta^0_{i_1,\ldots,i_l})$.

Очевидно,

$$\max_{x\in\Delta^0_{i_1,\ldots,i_l}} \varphi(x,\Delta^0_{i_1,\ldots,i_l}) \geq Ch_0^r \ln N = C\frac{\ln N}{N^{vr}} = \frac{C\ln N}{N^s}. \tag{3.12}$$

Оценка снизу максимального значения функции $\varphi(x,\Delta^1_{i_1,\ldots,i_l})$ следует из цепочки неравенств

$$\max_{x\in\Delta^1_{i_1,\ldots,i_l}} \varphi(x,\Delta^1_{i_1,\ldots,i_l}) \geq \frac{Ch_1^s}{h_0^\gamma} = C\frac{(\ln^{r/s} N - 1)^s N^{v\gamma}}{N^{vs}} \geq \frac{\ln N}{N^s}. \tag{3.13}$$

Для функций $\varphi(x,\Delta^k_{i_1,\ldots,i_l})$, $k=2,3,\ldots,M$, справедлива оценка

$$\max_{x\in\Delta^k_{i_1,\ldots,i_l}} \varphi(x,\Delta^k_{i_1,\ldots,i_l}) \geq C\frac{h_k^s}{(k\ln^{1/s} N/N)^{v\gamma}} \geq$$

$$\geq C\frac{N^{v\gamma}}{(k\ln^{1/s}N)^{v\gamma}}\frac{(\ln^{1/s}N)^{vs}}{N^{vs}}(k^v-(k-1)^v)^s \geq$$

$$\geq C\frac{\ln N}{N^s}\frac{(k-\Theta)^{(v-1)s}}{k^{v\gamma}} = C\frac{\ln N}{N^s}. \quad (3.14)$$

Для удобства дальнейших обозначений перенумеруем кубы $\Delta^k_{i_1,\ldots,i_l}$, покрывающие область Ω, и в этом же порядке перенумеруем функции $\varphi(x,\Delta^k_{i_1,\ldots,i_l})$, $k=0,1,\ldots,M$, которые обозначим через $\varphi_j(x)$,
$j=1,2,\ldots,n^*$.

Введем множество функций

$$\psi_{\alpha_1,\ldots,\alpha_{n^*}}(x)=\sum_{j=1}^{n^*}\alpha_j\varphi_j(x),$$

где $-1\leq\alpha_j\leq 1$, $j=1,2,\ldots,n^*$. Из построения функций $\varphi_j(x)$ следует, что $\psi_{\alpha_1,\ldots,\alpha_{n^*}}(x)\in\bar{Q}_{r,\gamma}(\Omega,M)$.

Множеству функций $\psi_{\alpha_1,\ldots,\alpha_{n^*}}(x)$, $-1\leq\alpha_j\leq 1$, $j=1,2,\ldots,n^*$, поставим в соответствие параллелепипед $\alpha=(\alpha_1,\ldots,\alpha_{n^*})$, $-1\leq$ $\alpha_j\leq$
≤ 1, $j=1,2,\ldots,n^*$.

После этого, повторяя рассуждения, неоднократно приводимые выше, приходим к оценке $\delta_{n^*-1}(\bar{Q}_{r,\gamma}(\Omega,M))\geq CN^{-s}\ln N$. Отсюда и из неравенства (3.11) имеем

$$\delta_{n^*-1}(\bar{Q}_{r,\gamma}(\Omega,M))\geq C(n^*)^{r/(l-1)}\ln n. \quad (3.15)$$

Пусть $f(x)$– произвольная функция из класса функций $\bar{Q}_{r,\gamma}(\Omega,M)$. Для доказательства справедливости неравенства

$$d_n(\bar{Q}_{r,\gamma}(\Omega,M),C)\leq Cn^{-r/(l-1)}\ln n$$

построим непрерывный локальный сплайн, аппроксимирующий функцию $f(x)$ и имеющий погрешность на этом классе, не превышающую $Cn^{-r/(l-1)}\ln n$.

Обозначим через Δ_k множество точек x, $x=(x_1,\ldots,x_l)$, для которых расстояние до границы Γ области Ω удовлетворяет неравенствам $(k/N)^v\leq d(x,\Gamma)\leq((k+1)/N)^v$, $k=0,1,\ldots,N-1$, где $v=s/(s-\gamma)$.

Покроем каждую из областей Δ_k, $k=0,1,\ldots,N-1$, кубами $\Delta^k_{i_1,\ldots,i_l}$ с ребрами, длины которых равны $h_k=((k+1)/N)^v-(k/N)^v$ и грани которых параллельны координатным осям. Подробное описание построения кубов $\Delta^k_{i_1,\ldots,i_l}$ и интерполяционных полиномов $f_s(x, \Delta^k_{i_1,\ldots,i_l})$, аппроксимирующих функцию $f(x)$ в кубах $\Delta^k_{i_1,\ldots,i_l}$, $k = 0, 1, \ldots, N-1$, приведено при доказательстве теоремы 3.1. Там же было показано, что число n кубов $\Delta^k_{i_1,\ldots,i_l}$, $k = 0, 1, \ldots, N-1$, покрывающих область Ω, равно $n \asymp N^{v(l-1)}$.

Обозначим через $f_N(x)$ непрерывный локальный сплайн, определенный в области Ω и составленный из полиномов $f_s(x, \Delta^k_{i_1,\ldots,i_l})$, $k =$
$= 0, 1, \ldots, N-1$.

Повторяя рассуждения, приведенные при доказательстве теорем 3.1 − 3.3, можно показать:

$$\|f(x) - f_N(x)\|_{C(\Omega)} \le BN^{-s} \ln N.$$

При построении локального сплайна $f_N(x)$ используется $m = s^l n \asymp$ $\asymp s^l N^{v(l-1)}$ узлов интерполяционных полиномов. Следовательно, выраженная через число узлов локального сплайна оценка его точности, имеет вид: $\|f(x) - f_N(x)\|_{C(\Omega)} \le Bm^{-r/(l-1)} \ln m$.

Отсюда следует оценка

$$d_n(\bar{Q}_{r,\gamma}(\Omega, M), C) \le Bn^{-r/(l-1)} \ln n. \tag{3.16}$$

Из оценок (3.15) − (3.16) и теоремы 1.1, связывающей поперечники Бабенко и Колмогорова, следует справедливость теоремы.

Теорема доказана.

Теорема 3.5. Пусть $\Omega = [-1, 1]^l, l \ge 2, \gamma-$ целое число, $v = (s-$ $-l/p + l/q)/(s - l/p + l/q - \gamma)$. Справедливы оценки

$$d_n(Q_{r,\gamma,p}(\Omega, M), L_q) \ge A \begin{cases} n^{-(s-\gamma-l/p+l/q)/(l-1)} & \text{при } q \le 2, \\ n^{-(s-\gamma-l/p+l/q)/(l-1)+1/q-1/2} & \text{при } p \le 2, q > 2, \\ n^{-(s-\gamma-l/p+l/q)/(l-1)-1/p+1/q} & \text{при } p > 2 \end{cases}$$

при $v > l/(l-1)$;

$$d_n(Q_{r,\gamma,p}(\Omega, M), L_q) \ge A \begin{cases} n^{-s/l+1/p-1/q} & \text{при } q \le 2, \\ n^{-s/l+1/p-1/2} & \text{при } p \le 2, q > 2, \\ n^{-s/l} & \text{при } p > 2 \end{cases}$$

при $v < l/(l-1)$;

$$d_n(Q_{r,\gamma,p}(\Omega, M), L_q) \ge A \begin{cases} \left(\frac{\ln n}{n}\right)^{s/l-1/p+1/q} & \text{при } q \le 2, \\ \frac{(\ln n)^{s/l-1/p+1/q}}{n^{s/l-1/p+1/2}} & \text{при } p \le 2, q > 2, \\ \frac{(\ln n)^{s/l+1/p-1/q}}{n^{s/l}} & \text{при } p > 2 \end{cases}$$

при $v = l/(l-1)$.

Доказательство. Обозначим через $\Delta_k (k = 0, 1, \ldots, N-1)$ множество точек $x = (x_1, \ldots, x_l)$ из Ω, расстояние $d(x, \Gamma)$ от которых до границы Γ области Ω удовлетворяет неравенствам $(k/N)^v \leq d(x, \Gamma) \leq$
$\leq ((k+1)/N)^v$, где $v = (s - l/p + l/q)/(s - l/p + l/q - \gamma)$.

В каждой области Δ_k разместим кубы $\Delta^k_{i_1,\ldots,i_l}$, ребра которых равны $h_k = ((k+1)/N)^v - (k/N)^v$.

Обозначим через $\varphi(x_1, \ldots, x_l)$ бесконечно дифференцируемую в области $(-\infty, \infty)^l$ функцию с носителем $[-1, 1]^l$, удовлетворяющую условию $\|\varphi^{(s)}\|_{L_p(\Omega)} = 1$. Введем функцию $\varphi^*_{i_1,\ldots,i_l}(x_1, \ldots, x_l)$, равную нулю всюду, кроме куба $\Delta^k_{i_1,\ldots,i_l} = [b^k_{i_1}, b^k_{i_1+1}; \ldots; b^k_{i_1}, b^k_{i_1+1}]$, а в кубе $\Delta^k_{i_1,\ldots,i_l}$ определяемую формулой:

$$(h_k/2)^{s-l/p}\varphi(-1 + 2(x_1 - b^k_{i_1})/h_k, \ldots, -1 + 2(x_l - b^k_{i_l})/h_k).$$

Через $\varphi^{k*}_{i_1,\ldots,i_l}(x_1, \ldots, x_l)$ $((x_1, \ldots, x_l) \in \Delta^k_{i_1,\ldots,i_l})$ обозначим функцию

$$\varphi^{k*}_{i_1,\ldots,i_l}(x_1, \ldots, x_l) = \frac{\varphi^k_{i_1,\ldots,i_l}(x_1, \ldots, x_l)}{((k+1)/N)^{v\gamma}}.$$

Нетрудно видеть, что $\varphi^{k*}_{i_1,\ldots,i_l}(x_1, \ldots, x_l) \in Q_{r,\gamma,p}(\Omega, M)$.

Рассмотрим множество функций

$$u(x_1, \ldots, x_l) = \sum_k \sum_i c_{ki}\varphi^{k*}_{i_1,\ldots,i_l},$$

где $\sum_k \sum_i \mid c_{ki} \mid^p \leq 1$. Громоздкие вычисления дают оценку

$$\left[\int\limits_{\Delta^k_{i_1,\ldots,i_l}} \cdots \int \left|\varphi^{k*}_{i_1,\ldots,i_l}(x_1, \ldots, x_l)\right|^q dx_1 \ldots dx_l\right]^{1/q} \asymp N^{-(s-l/p+l/q)}.$$

Из последнего соотношения, из формулы (3.1) и из теоремы 1.10 следует справедливость теоремы.

Теорема 3.6. Пусть $\Omega = [-1, 1]^l$, $l \geq 2$. Справедлива оценка

$$\delta_n(Q_{r,\gamma,p}(\Omega, M)) \geq A \begin{cases} n^{-(s-\gamma-1/p)/(l-1)} & \text{при } v > l/(l-1), \\ n^{-s/l} & \text{при } v < l/(l-1), \\ n^{-s/l}(\ln n)^{s/l-1/p} & \text{при } v = l/(l-1), \end{cases}$$

где $v = (s - l/p)/(s - \gamma - l/p)$.

Доказательство. Обозначим через Δ_k $(k = 0, 1, \ldots, N-1)$ множество точек $x = (x_1, \ldots, x_l)$ из Ω, расстояние от которых до границы Γ области Ω удовлетворяет неравенствам $(k/N)^v \le d(x, \Gamma) \le$ $\le ((k+1)/N)^v$, где $v = (s - l/p)/(s - \gamma - l/p)$. В каждой области Δ_k разместим кубы $\Delta^k_{i_1,\ldots,i_l}$, ребра которых равны $h_k = ((k+1)/N)^v -$ $(k/N)^v$, а грани параллельны координатным плоскостям.

Обозначим через $\varphi(x_1, \ldots, x_l)$ бесконечно дифференцируемую в $(-\infty, \infty)^l$ функцию с носителем $[-1, 1]^l$, удовлетворяющую условию:

$$\|\varphi^{(s)}\|_{L_p([-1,1]^l)} = 1.$$

Введем функцию $\varphi^k_{i_1,\ldots,i_l}(x_1, \ldots, x_l)$, равную нулю всюду, кроме куба $\Delta^k_{i_1,\ldots,i_l} = [b^k_{i_1}, b^k_{i_1+1}, \ldots b^k_{i_l}, b^k_{i_l+1}]$, а в кубе $\Delta^k_{i_1,\ldots,i_l}$, определяемую формулой:

$$\left(\frac{h_k}{2}\right)^{s-l/p} \varphi\left(-1 + \frac{2(x_1 - b^k_{i_1})}{h_k}, \ldots, -1 + \frac{2(x_l - b^k_{i_l})}{h_k}\right).$$

Через $\varphi^{*k}_{i_1,\ldots,i_l}(x_1, \ldots, x_l)$ обозначим функцию

$$\varphi^{*k}_{i_1,\ldots,i_l}(x_1, \ldots, x_l) = \frac{\varphi^k_{i_1,\ldots,i_l}(x_1, \ldots, x_l)}{((k+1)/N)^{v\gamma}}$$

при $(x_1, \ldots, x_l) \in \Delta^k_{i_1,\ldots,i_l}$.

Введем множество функций

$$\varphi^*(x_1, \ldots, x_l) = n^{-1/p} \sum_k \sum_{i_1,\ldots,i_l} c_{ki_1\ldots i_l} \varphi^{*k}_{i_1\ldots v_l}(x_1, \ldots, x_l),$$

$c_{ki_1\ldots i_l} = \pm 1$, где $n-$ число кубов $\Delta^k_{i_1,\ldots,i_l}$, покрывающих область Ω.

Нетрудно видеть, что $\varphi^*(x_1, \ldots, x_l) \ge An^{-1/p}(N/(k+1))^{v\gamma} h_k^{s-l/p} \ge$ $\ge An^{-1/p} N^{-s+l/p}$.

Воспользовавшись соотношением (3.1) и повторяя рассуждения, приведенные при доказательстве теоремы 3.1, завершаем доказательство теоремы.

В ряде случаев удается оценить сверху поперечник Колмогорова и построить сплайн, реализующий соответствующую оценку.

Теорема 3.7. Пусть $\Omega = [-1, 1]^l$, $l \ge 2$, $q \le p$, $\gamma-$ целое число.

Справедлива оценка

$$d_n(Q_{r,\gamma,p}(\Omega, M), L_q) \asymp \begin{cases} n^{-r/(l-1)} & \text{при } v > l/(l-1), \\ n^{-s/l} & \text{при } v < l/(l-1), \\ (n/\ln n)^{-s/l} & \text{при } v = l/(l-1), \end{cases}$$

где $v = s/(s-\gamma)$.

Доказательство. Вначале оценим снизу величину поперечника $d_n(Q_{r,\gamma,p}(\Omega, M), L)$.

По аналогии с рассуждениями, приведенными при доказательстве теоремы 3.1, разобьем область Ω на области Δ_k; в последние впишем кубы $\Delta^k_{i_1,\ldots,i_l}$, $k = 0, 1, \ldots, N-1$, с длиной ребра $h_k = ((k+1)/N)^v -$
$-(k/N)^v$ и гранями, параллельными координатным плоскостям.

Рассмотрим вначале случай, когда $l = 2$. Построим отображение сферы $\sum^{n-1}$на множество $Q_{r,\gamma,p}([-1,1]^l, M)$. Обозначим через n общее число квадратов $\Delta^k_{i_1,i_2}$, покрывающих область Ω. Зафиксируем произвольные положительные числа $t_1, \ldots, t_n$, такие, что $\sum_{k=1}^n t_k = 1$. Через n_k обозначим число квадратов, которые можно разместить в области Δ_k.

Введем обозначение

$$s(k,i) = \sum_{v=0}^{k-1} n_v + i m_k.$$

Пусть

$$m_k = n_k/4, \quad \alpha_k^i = \sum_{j=s(k,i-1)+1}^{s(k,i)} t_j, i = 1,2,3,4, \quad k = 0,1,\ldots,N-1.$$

Будем считать числа m_k целыми. За построением изображения можно проследить по рис. 1. Зафиксируем произвольное k $(0 \le k <$
$< N-1)$. Пусть $l_k = 2 - (k/N)^v - ((k+1)/N)^v$. На сегменте $[A_k^1, C_k^1]$ разместим m_k точек

$$\tau^1_{k,j} = A_k^1 + l_k (\alpha_k^1)^{-1} \sum_{v=s(k,i-1)+1}^{s(k,i-1)+j} t_v, \quad j = 1,2,\ldots,m_k, \quad \tau_{k,0} = A_k^1.$$

Проведя через точки $\tau^1_{k,j}$ прямые, параллельные оси ординат, разбиваем прямоугольник $A_k^1 C_k^1 B_k^2 C_k^2$ на более мелкие прямоугольники $\Delta^{k,1}_{i_1,i_2}$, $k = 0,1,\ldots,N-1$. Аналогичным образом строится покрытие области Δ_k прямоугольниками $\Delta^{k,j}_{i_1,i_2}$, $j = 1,2,3,4$. Возьмем произвольный прямоугольник $\Delta^{k,1}_{i_1,i_2} = [a^{k,1}_{i_1}, a^{k,1}_{i_1+1}; a^{k,1}_{i_2}, a^{k,l}_{i_2+1}]$. В нем построим функцию

$$\psi(x_1, x_2; \Delta^{k,1}_{i_1,i_2}) =$$

$$= A \frac{\left|(x_1 - a^{k,1}_{i_1})(a^{k,1}_{i_1+1} - x_1)(x_2 - a^{k,1}_{i_2})(a^{k,1}_{i_2+1} - x_2)\right|^s}{h_k^s (h^{k,1}_{i_1 i_2})^s (\max(h_k, h^{k,1}_{i_1 i_2}))^s ((k+1)/N)^{v\gamma}},$$

где $h_k = ((k+1)/N)^v - (k/N)^v$– длина одной, а $h^{k,1}_{i_1 i_2}$– длина второй сторон прямоугольника $\Delta^{k,1}_{i_1 i_2}$. Константа A подбирается таким образом, чтобы функция $((k+1)/N)^{v\gamma}\psi(x_1, x_2, \Delta^{k,1}_{i_1 i_2})$ имела частные производные до s-го порядка включительно, ограниченные по модулю единицей. Из построения квадратов $\Delta^{k,j}_{i_1,i_2}$, $j = 1, 2, 3, 4$ следует, что каждому числу t_v, $\sum\limits_{v=1}^{n} t_v = 1$, ставится в соответствие квадрат $\Delta^{k,j}_{i_1,i_2}$, где $v = g(k, i_1, i_2, j)$, причем возможны различные функции $g(k, i_1, i_2, j)$.

Поставив каждому прямоугольнику $\Delta^{k,j}_{i_1,i_2}$ в соответствие функцию $\pm\psi(x_1, x_2; \Delta^{k,l}_{i_1,i_2})$, тем самым зададим в области Ω функцию $\psi(x_1, x_2) \in Q_{r,\gamma,p}(\Omega, M)$.

Эта функция осуществляет нечетное и непрерывное отображение единичной сферы $\sum^{n-1}$ в множество $Q_{r,\gamma,p}(\Omega, M)$. Найдем минимум $\|\psi(x_1, x_2)\|_{L_1}$ при вариации значений $t_1, \ldots, t_n$ и при условии $\sum\limits_{k=1}^{n} t_k = 1$.

Для этого вычислим по области $\Delta_{i_1,i_2}^{k,j}$ интеграл

$$\int\int \psi(x_1, x_2) dx_1 dx_2 \geq$$

$$\geq A(N/(k+1))^{v\gamma}(h_{i_1,i_2}^{k,j})^{s+1}((k+1)/N)^v - (k/N)^v)^{s+1}(h_k + h_{i_1 i_2}^{k,j})^{-s}.$$

Область Δ_k покрывается $4m_k$ прямоугольниками, для каждого из которых справедливо приведенное выше неравенство. Просуммируем эти неравенства. Имеем

$$\sum_{k=0}^{N-1} \sum_{i_1,i_2} \sum_{j=1}^{4} \int \int\limits_{\Delta_{i_1,i_2}^{k,j}} \psi(x_1, x_2; \Delta_{i_1,i_2}^{k,j}) dx_1 dx_2 \geq AN^{-s}.$$

Воспользовавшись теоремой Маковоза, получаем оценку: $d_n(Q_{r,\gamma,p}(\Omega, M), L) \geq AN^{-s}$.

Из формулы (3.1) следует:

$$d_n(Q_{r,\gamma,p}(\Omega, M)) \geq A \begin{cases} n^{-s+\gamma} & \text{при } v > 2, \\ n^{-s/2} & \text{при } v < 2, \\ (n/\ln n)^{-s/2} & \text{при } v = 2. \end{cases}$$

Оценка снизу получена при $l = 2$. Аналогичные рассуждения проводятся при произвольном $l \geq 2$.

Построим алгоритм аппроксимации, реализующий эту оценку. В каждом кубе $\Delta_{i_1,\ldots,i_l}^k$ функцию $f(x_1, \ldots, x_l)$ будем аппроксимировать отрезком ряда Тейлора

$$f_N(x_1, \ldots, x_l, \Delta_{i_1,\ldots,i_l}^k) =$$

$$= f(M_{i_1,\ldots,i_l}^k) + \frac{df(M_{i_1,\ldots,i_l}^k)}{1!} + \ldots + \frac{d^m f(M_{i_1,\ldots,i_l}^k)}{m!},$$

где $m = s - 1$ при $k \neq 0$ и $m = r - 1$ при $k = 0, M_{i_1,\ldots,i_l}^k -$ точка пересечения диагоналей куба $\Delta_{i_1,\ldots,i_l}^k$. Тогда при $k \geq 1$

$$\int\limits_{\Delta_{i_1,\ldots,i_l}^k} \int \left| f(x_1, \ldots, x_l) - f_N(x_1, \ldots, x_l; \Delta_{i_1,\ldots,i_l}^k) \right|^p dx_1 \ldots dx_l \leq$$

$$\leq h_k^{sp}\left(\frac{N}{k}\right)^{v\gamma p}\sum_{j_1=1}^{l}\cdots\sum_{j_l=1}^{l}\int\limits_{\Delta^k_{i_1,\ldots,i_l}}\int\left|\int\limits_0^1(1-u)^{s-1}u^{s-1}d(x,\Gamma))^{\gamma}\times\right.$$

$$\left.\times\frac{\partial^s f(x)}{\partial x_{j_1}\ldots\partial x_{j_l}}du\right|^p dx_1\ldots dx_l.$$

Поэтому

$$\left|\sum_{k\geq 1}\sum_i\int\limits_{\Delta^k_{i_1,\ldots,i_l}}\int\left|f(x_1,\ldots,x_l)-f_N(x_1,\ldots,x_l;\Delta^k_{i_1,\ldots,i_l})\right|^p dx_1\ldots dx_l\right|^{1/p}\leq$$

$$\leq\left|\sum_{k\geq 1}h_k^{sp}\left(\frac{N}{k}\right)^{v\gamma p}\sum_i\sum_{j_1=1}^{l}\cdots\sum_{j_l=1}^{l}\int\limits_{\Delta^k_{i_1,\ldots,i_l}}\left|\frac{(d(x,\Gamma))^{\gamma}\partial^s f(x)}{\partial x_{j_1}\ldots\partial x_{j_l}}\right|^p dx\right|^{1/p}\leq$$

$$\leq AN^{-s}.$$

Перейдем к аппроксимации в кубах $\Delta^0_{i_1,\ldots,i_l}$. Нетрудно видеть, что

$$\mid f(x_1,\ldots,x_l)-f_N(x_1,\ldots,x_l;\Delta^0_{i_1,\ldots,i_l})\mid= Ah_0^r.$$

Следовательно,

$$\left[\sum_i\int\limits_{\Delta^0_{i_1,\ldots,i_l}}\int\left|f(x_1,\ldots,x_l)-f_N(x_1,\ldots,x_l;\Delta^0_{i_1,\ldots,i_l})\right|^p dx_1\ldots dx_l\right]^{1/p}\leq$$

$$\leq Ah_0^r\left[\sum_i\int\limits_{\Delta^0_{i_1,\ldots,i_l}}\int dx_1\ldots dx_l\right]^{1/p}\leq Ah_0^rN^{-v/p}\leq\frac{A}{N^{v(r+1/p)}}=\frac{A}{N^s}.$$

Теорема доказана.

Теорема 3.8. Пусть $\Omega=[-1,1]^l$, $l\geq 2$, $p<q\leq 2$, $v=(s-l/p+$ $+l/q)/(s-l/p+l/q-\gamma)$, $\gamma-$ целое число. Справедлива оценка

$$d_n(Q_{r,\gamma,p},L_q)\asymp\begin{cases}n^{-(r-l/p+l/q)/(l-1)} & \text{при } v>l/(l-1),\\ n^{-(s-l/p+l/q)/l} & \text{при } v<l/(l-1),\\ (n/\ln n)^{-(s-l/p+l/q)/l} & \text{при } v=l/(l-1).\end{cases}\qquad(3.17)$$

Доказательство. Оценка снизу поперечника d_n вычислена в теореме 3.5.

Перейдем к оценке сверху. Обозначим через $\Delta_k(k = 0, 1, \dots, N - -1)$ множество точек $x = (x_1, \dots, x_l)$ из Ω, расстояние от которых до границы Γ области Ω удовлетворяет неравенствам $(k/N)^v \leq d(x, \Gamma) \leq$
$\leq ((k+1)/N)^v$, где $v = (s - l/p + l/q)/(s - l/p + l/q - \gamma)$.

В каждой области Δ_k разместим кубы $\Delta^k_{i_1,\dots,i_l}$, ребра которых равны $h_k = ((k+1)/N)^v - (k/N)^v$.

Обозначим через $P_s(f, [-1, 1])$ интерполяционный полином степени $s - 1$, построенный по узлам полинома Чебышева первого рода; через $P_s(f, [a, b])-$ интерполяционный полином, полученный из $P_s(f, [-1, 1])$ при отображении сегмента $[-1, 1]$ на $[a, b]$; через $P_s(f, \Delta^k_{i_1,\dots,i_l})-$ интерполяционный полином

$$P_s(f, \Delta^k_{i_1,\dots,i_l}) = P_s^{x_1} P_s^{x_2} \dots P_s^{x_l}(f, \Delta^k_{i_l,\dots i_l}),$$

где верхний индекс x_j обозначает переменную, по которой проводится интерполяция.

Нетрудно видеть, что для интерполяционного полинома $P_s(f; \Delta^k_{i_1,\dots,i_l})$ справедливы неравенства

$$\|f - P_s(f; \Delta^k_{i_1,\dots,i_l})\|_C = \|f - P_{\Delta^k_{i_1,\dots,i_l}}(f) + P_s(f - P_{\Delta^k_{i_1,\dots,i_l}}(f))\|_C \leq$$

$$\leq A(\text{mes } \Delta^k_{i_1,\dots,i_l})^{s/l - 1/p} \|f\|_{L^s_p(\Delta^k_{i_1,\dots,i_l})};$$

$$\|f - P_s(f, \Delta^k_{i_1,\dots,i_l})\|_{L_q} \leq A(\text{mes } \Delta^k_{i_1,\dots,i_l})^{1/q - 1/q^*} \|f\|_{L^s_p(\Delta^k_{i_1,\dots,i_l})}.$$

Здесь $P_{\Delta^k_{i_1,\dots,i_l}}(f)-$ интерполяционный полином, описанный в леммах 3.4 и 3.5 главы 1.

Рассмотрим вначале случай, когда $sp > l$.

В кубах $\Delta^k_{i_1,\dots,i_l}$ при $k \geq 1$ аппроксимируем функцию f интерполяционным полиномом $P_s(f, \Delta^k_{i_1,\dots,i_l})$. В результате имеем

$$\left[\sum_{k=1}^{N-1} \sum_{i_1,\dots,i_l} \int\limits_{\Delta^k_{i_1,\dots,i_l}} \left| f(x) - P_s(f, \Delta^k_{i_1,\dots,i_l}) \right|^q dx \right]^{1/q} \leq$$

$$\leq \left[\sum_{k=1}^{N-1} \sum_{i_1,\dots,i_l} h_k^{(s-l/p)q+1} \left(\frac{N}{k} \right)^{v\gamma q} \left(\|d(x,\Gamma) f(x)\|_{L^s_p(\Delta^k_{i_1,\dots,i_l})} \right)^q \right]^{1/q} \leq$$

$$\leq A N^{-(s-l/p+l/q)} \left[\sum_{k=1}^{N-1} \sum_{i_1,\dots,i_l} \left(\|d(x,\Gamma) f(x)\|_{L^s_p(\Delta^k_{i_1,\dots,i_l})} \right)^q \right]^{1/q} \leq$$

$$\leq AN^{-(s-l/p+l/q)}\|d(x,\Gamma)f(x)\|_{L_p^s(\Delta)}.$$

Здесь

$$\|d(x,\Gamma)f(x)\|_{L_p^s(\Omega)} = \left[\sum_{|v|=s}\int_{\Omega} d(x,\Gamma)|D^v f|^p dx\right]^{1/p}.$$

Осталось оценить погрешность аппроксимации в кубах $\Delta^0_{i_1,\dots,i_l}$. Очевидно,

$$\left[\sum_{i_1,\dots,i_l}\int_{\Delta^0_{i_1,\dots,i_l}} \left|f - P_s(f,\Delta^0_{i_1,\dots,i_l})\right|^q dx\right]^{1/q} \leq$$

$$\leq Ah_0^{r-l/p+l/q}\left[\sum_{i_1,\dots,i_l}(\|f\|_{L_p^r(\Delta^0_{i_1,\dots,i_l})})^q\right]^{1/q} \leq$$

$$\leq Ah_0^{r-l/p+l/q}h_0^{1/q} < AN^{-(s-l/p+l/q)}.$$

Таким образом, окончательно имеем

$$\|f - P_s(f,\Omega)\|_{L_q} \leq AN^{-s+l/p-l/q}.$$

Связь между числом функционалов, необходимых для построения сплайна $P_s(f,\Omega)$, и числом N установлена соотношением (3.1). Воспользовавшись этим соотношением, получаем оценку поперечника сверху. В случае $ps > l$ теорема доказана.

Перейдем к случаю, когда $ps \leq l$.

В кубах $\Delta^k_{i_1,\dots,i_l}$ при $k \geq 1$ аппроксимируем функцию f интерполяционным полиномом $P_s(f,\Delta^k_{i_1,\dots,i_l})$. В результате имеем

$$\left[\sum_{k=1}^{N-1}\sum_{i_1,\dots,i_l}\int_{\Delta^k_{i_1,\dots,i_l}} \left|f(x) - P_s(f,\Delta^k_{i_1,\dots,i_l})\right|^q dx\right]^{1/q} \leq$$

$$\leq AN^{-s+l/p-l/q}\|d(x,\Gamma)f\|_{L_p^s(\Omega)}.$$

В кубах $\Delta^0_{i_1,\dots,i_l}$ аппроксимация проводится так же, как и в случае $ps > l$. Повторяя проведенные выше рассуждения, завершаем доказательство теоремы.

Теорема 3.9. Пусть $\Omega = [-1,1]^l$, $l \geq 2$, $p \leq 2$, $q > 2$, $\gamma-$ целое число. Справедлива оценка

$$d_n(Q_r(\Omega,M),L_q) \asymp$$

$$\asymp \begin{cases} n^{-(r-l/p+l/q)/(l-1)+1/q-1/2} & \text{при } v > l/(l-1), \\ n^{-(s/l-1/p+1/2)} & \text{при } v < l/(l-1), \end{cases} \tag{3.18}$$

$v = (s - l/p + l/q)/(s - l/p + l/q - \gamma)$.

Доказательство. Оценка снизу поперечника $d_n(Q_{r,\gamma,p}(\Omega, M), L_q)$ вычислена в теореме 3.5.

Оценим сверху поперечник $d_n(Q_{r,\gamma,p}(\Omega, M), L_q)$. Обозначим через Δ_m $(m = 0, 1, \ldots, 2^N - 1)$ множество точек $x = (x_1, \ldots, x_l)$ из Ω, расстояние от которых до границы Γ области Ω удовлетворяет неравенствам

$$(m/2^N)^v \le d(x, \Gamma) \le ((m+1)/2^N)^v,$$

где $v = (s - l/p + l/q)/(s - l/p + l/q - \gamma)$.

В каждой области Δ_m разместим кубы $\Delta^m_{i_1,\ldots,i_l}$, ребра которых равны $h_m = ((m+1)/2^N)^v - (m/2^N)^v$. В каждом кубе $\Delta^m_{i_1,\ldots,i_l}$ функция $f(x)$ аппроксимируется интерполяционным полиномом $P_s(f, \Delta^m_{i_1,\ldots,i_l})$, описанным при доказательстве предыдущей теоремы. Повторяя проведенные в ней выкладки, можно показать, что $\|f(x) - f_N(x)\|_{L_q} \le$
$\le A2^{-N(s-l/p+l/q)}$, где $f_N(x)-$ сплайн, совпадающий в каждом кубе $\Delta^m_{i_1,\ldots,i_l}$ с полиномом $P_s(f, \Delta^m_{i_1,\ldots,i_l})$.

Обозначим через n число кубов $\Delta^m_{i_1,\ldots,i_l}$, размещенных в области Ω. Связь между n и 2^N установлена соотношением (3.1), которое в данном случае имеет вид

$$n \asymp \begin{cases} 2^{Nv(l-1)} & \text{при } v > l/(l-1), \\ 2^{Nl} & \text{при } v < l/(l-1), \\ N2^{Nl} & \text{при } v = l/(l-1). \end{cases}$$

Обозначим через $\tilde{\Delta}^k_{i_1,\ldots,i_l}$ кубы, внутренние точки которых совпадают с внутренними точками кубов $\Delta^k_{i_1,\ldots,i_l}$. Боковые грани кубов $\tilde{\Delta}^k_{i_1,\ldots,i_l}$ построены таким образом, чтобы объединение всех кубов $\tilde{\Delta}^k_{i_1,\ldots,i_l}$ совпадало с областью Ω, а пересечение любых двух кубов $\tilde{\Delta}^k_{i_1,\ldots,i_l}$ и $\tilde{\Delta}^l_{j_1,\ldots,j_l}$, которые отличаются хотя бы одним индексом, было бы пусто. Очевидно такое покрытие области Ω неоднозначно.

Обозначим через $S_{s^l n}$ пространство всех функций $f(x)$, совпадающих в каждом кубе $\tilde{\Delta}^m_{i_1,\ldots,i_l}$ с некоторым многочленом степени $s-1$ по каждой переменной.

Пусть $f(x)$– полином степени $s-1$ по каждой переменной в отдельности, определенный в кубе $G=[0,1]^l$. Рассмотрим две нормы

$$\|f\|_{L_p(G)} = \left[\int\limits_G |f(x)|^p\,dx\right]^{1/p}$$

и

$$\|f\|_* = \left[\sum_{i_1=0}^{s-1}\cdots\sum_{i_l=0}^{s-1}\left|f\left(\frac{i_1+1/2}{s},\ldots,\frac{i_l+1/2}{s}\right)\right|^p\right]^{1/p}.$$

Лемма 3.1. Справедливы неравенства

$$A\|f\|_* \le \|f\|_{L_p} \le B\|f\|_*. \tag{3.19}$$

Доказательство. Неравенства (3.19) справедливы, так как две любые нормы в конечномерных пространствах эквивалентны.

Пусть $\Delta^m_{i_1,\ldots,i_l} = [a^m_{i_1}, a^m_{i_1+1};\ldots;a^m_{i_l}, a^m_{i_l+1}]$. Введем норму

$$\|f\|_{N,\alpha} = \left[\sum_{k=0}^{2^N-1} h_k^l \sum_{i_1}\cdots\sum_{i_l}\sum_{k_1=0}^{s-1}\cdots\sum_{k_l=0}^{s-1}\left|f\left(a^k_{i_1}+\frac{k_1+1/2}{s}h_k,\ldots,a^k_{i_l}+\right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left.+\ \frac{k_l+1/2}{s}h_k\right)\right|^\alpha\right]^{1/\alpha}.$$

Лемма 3.2. Пусть $f\in S_{s^l n_k}$. Справедливы неравенства

$$A\|f\|_{k,\alpha} \le \|f\|_{L_p(\Omega)} \le B\|f\|_{k,\alpha}.$$

Доказательство. Сделаем в интеграле

$$\int\limits_{\Delta^m_{i_1,\ldots,i_l}} |f(x)|^p\,dx$$

замену переменных $x_1 = a^m_{i_1}+t_1h_m,\ldots,x_l = a^m_{i_l}+t_lh_m$. Тогда

$$\int\limits_{\Delta^m_{i_1,\ldots,i_l}} |f(x)|^p\,dx = h^l_m\int\limits_G \left|f\left(a^m_{i_1}+t_1h_m,\ldots,a^m_{i_l}+t_lh_m\right)\right|^p dt_1\ldots dt_l.$$

Следовательно,

$$A^p h^l_m\sum_{k_1=0}^{s-1}\cdots\sum_{k_l=0}^{s-1}\left|f\left(a^m_{i_1}+\frac{k_1+1/2}{s}h_m,\ldots,a^m_{i_l}+\frac{k_1+1/2}{s}h_m\right)\right|^p \le$$

$$\leq \int\limits_{\Delta^m_{i_1,\ldots,i_l}} |f(x)|^p\, dx \leq$$

$$\leq B^p h_m^l \sum_{k_1=0}^{s-1} \ldots \sum_{k_l=0}^{s-1} \left| f\left(a^m_{i_1} + \frac{k_1+1/2}{s} h_m, \ldots, a^m_{i_l} + \frac{k_1+1/2}{s} h_m \right) \right|^p .$$

Суммируя эти неравенства по m и $i_1, \ldots, i_l$, убеждаемся в справедливости леммы.

Лемма 3.3. Любая функция $f(x) = Q_{r,\gamma,p}([-1,1]^l)$, $l \geq 2$, представима в виде равномерно на $[-1,1]^l$ сходящегося ряда

$$\varphi(x) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k(x), \quad x \in [-1,1]^l, \tag{3.20}$$

где $f_k(x) \in S_{s^l n_k}$, $\|\varphi(x) - \varphi_{n_k}(x)\|_{L_q} \leq A n^{-k(s-l/p+l/q)}$.

Доказательство. Выше всякой функции $\varphi(x) \in Q_{r,\gamma,p}(\Omega, M)$ был поставлен в соответствие сплайн $\varphi_{n_k}(x) \in S_{s^l n_k}$, такой, что

$$\|\varphi(x) - \varphi_{s^l n_k}(x)\|_{L_q} \leq A 2^{-k(s-l/p+l/q)}.$$

Полагая $f_0(x) = \varphi_0(x)$ и $f_k(x) = \varphi_{n_k}(x) - \varphi_{n_{k-1}}(x)$, получаем (3.20). Очевидно,

$$\|f_k(x)\|_{L_q} \leq \|\varphi - \varphi_{n_k}\|_{L_q} + \|\varphi - \varphi_{n_{k-1}}\|_{L_q} \leq A 2^{-k(s-l/p+l/q)}.$$

Лемма доказана.

Лемма 3.4. Пусть $s > l/p - l/q$; n, m_k– целые неотрицательные числа, удовлетворяющие условию $\sum_{k=0}^{\infty} m_k \leq n$. Тогда

$$d_n(Q_{r,\gamma,p}(\Omega, M), L_q) \leq A \sum_{i=0}^{\infty}{}' 2^{-is} d_{m_i}(B_p^{s^l n_i}, L_q^{s^l n_i}) +$$

$$+ A \sum_{i=0}^{\infty}{}'' 2^{-i(s-l/p+l/q)}, \tag{3.21}$$

где A зависит только от p, q и s; $\sum'$ означает суммирование по i таким, что $m_i \neq 0, \sum''$ – суммирование по остальным i.

Доказательство. Банахово пространство $S^p_{s^l n_k}$ изоморфно и изометрично пространству $l_{s^l n_k}$. Согласно определению m_k-го поперечника для любого $\varepsilon > 0$ существует такое m_k-мерное пространство $L_{m_k} \subset S^p_{s^l n_k}$, что

$$d(B(S^p_{s^l n_k}), L_{m_k}, S^q_{s^l n_k}) \leq d_{m_k}(B_p^{s^l n_k}, l_q^{s^l n_k}) + \varepsilon, \tag{3.22}$$

где $B(S^p_{s^l n_k}) = B^{s^l n_k}_p$ – единичный шар пространства $S^p_{s^l n_k}$,

$$d(K, L_n, L) = \sup_{x\in K} d(x, L_n, L),\ \ d(x, L_n, L) = \inf\{\|x - y\|_L : y \in L_n\}.$$

Положим $L_n = \sum\limits_k L_{m_k}$ (сумма состоит из конечного числа слагаемых). Тогда $\dim\ L_n \le n$, и можно считать, что $\dim\ L_n = n$. Оценим отклонение произвольной функции $\varphi(x) \in Q_{r,\gamma,p}([-1,1]^l)$ от L_n в метрике пространства L_q.

Из неравенства (3.22) следует, что для функции f_i, являющейся i-м членом ряда (3.20) существует такая функция $\overline{f}_i \in L_{m_i}$, что:

$$\|f_i - \overline{f}_i\|_{k,q} \le A\|f_i\|_{k,q}(d_{m_i}(B^{s^l n_i}_p, l^{s^l n_i}_q) + \varepsilon).$$

Применяя лемму 3.2, перепишем это неравенство в виде:

$$\|f_i - \overline{f}_i\|_q \le A\|f_i\|_p(d_{m_i}(B^{s^l n_i}_p, l^{s^l n_i}_q) + \varepsilon).$$

Воспользовавшись оценкой $\|f_i\|_p$, приведенной в лемме 3.3, имеем:

$$\|f_i - \overline{f}_i\|_q \le A2^{-is}(d_{m_i}(B^{s^l n_i}_p, l^{s^l n_i}_q) + \varepsilon).$$

Положим $\overline{\varphi}(x) = \sum\limits_{i=0}^{\infty} \overline{f}_i(x)$, причем сумма содержит лишь конечное число ненулевых функций. Тогда

$$\|\varphi(x) - \overline{\varphi}(x)\|_q \le A\sum_{i=0}^{\infty}{}' 2^{-is}(d_{m_i}(B^{s^l n_i}, l^{s^l n_i}_q) + \varepsilon) +$$

$$+A\sum_{i=0}^{\infty}{}'' 2^{-i(s-l/p+l/q)},$$

где $\sum'$ означает суммирование по таким i, что $\overline{f}_i(x) \ne 0; \sum''$ – суммирование по остальным i. Из произвольности ε следует неравенство (3.21). Лемма доказана.

Продолжим доказательство теоремы 3.9. Рассмотрим вначале случай, когда $v < l/(l-1)$. Положим

$$m_i = \begin{cases} s^l n_i - 1 & \text{при } i < [\mu \log_2 n], \\ s^l n_{[\mu\log_2 n]} & \text{при } [\mu\log_2 n] \le i \le [w\log_2 n], \\ 0 & \text{при } i > [w\log_2 n], \end{cases}$$

где $\mu = (s/l - 1/p + 1/2)/(s + l/2), w = (s/l - 1/p + 1/2)/(s - l/p + l/q)$,

$$n_i = \begin{cases} s2^{il} & \text{при } i < [\mu \log_2 n], \\ s2^{l[\mu\log_2 n]} & \text{при } [\mu\log_2 n] \le i \le [w\log_2 n], \\ 0 & \text{при } i > [w\log_2 n]. \end{cases}$$

Из теоремы 3.8 следует, что

$$d_n(Q_{r,\gamma,p}(\Omega, M), L_q) \le \sum_1 + \sum_2 =$$

$$= A \sum_{i=[\mu \log_2 n]}^{[w \log_2 n]} 2^{-is} d_{n_i}(B_p^{s^l m_i}, l_q^{s^l m_i}) + A \sum_{i=[w \log_2 n]+1}^{\infty} 2^{-(i/s-l/p+l/q)}. \quad (3.23)$$

Оценим каждую из этих сумм в отдельности. Очевидно,

$$\sum_2 = A \sum_{i=[w \log_2 n]+1}^{\infty} 2^{-i(s-l/p+l/q)} \le An^{-w(s-l/p+l/q)} \le$$

$$\le An^{-(s-1/p+1/2)}. \quad (3.24)$$

Приступим к оценке $\sum_1$, полагая вначале, что $q = \infty$. Так как

$$d_n(B_p^m, l_\infty^m) \le d_n(B_2^m, l_\infty^m),$$

то

$$A \sum_{i=[\mu \log_2 n]}^{[w \log_2 n]} 2^{-is} d_{m_i}(B_p^{s^l n_i}, l_\infty^{s^l n_i}) \le$$

$$\le A \sum_{i=[\mu \log_2 n]}^{[w \log_2 n]} 2^{-is} d_{m_i}(B_2^{s^l n_i}, l_\infty^{s^l n_i}) \le A \sum_{i=[\mu \log_2 n]}^{[w \log_2 n]} 2^{-is} m_i^{-1/2} \le$$

$$\le A \sum_{i=[\mu \log_2 n]}^{[w \log_2 n]} 2^{-is} 2^{-il/2} \le An^{-(s/l-1/p+1/2)}.$$

Учитывая, что $d_n(Q_{r,\gamma,p}(\Omega, M), L_q) \le d_n(Q_{r,\gamma,p}(\Omega, M), L_\infty)$, имеем:

$$\sum_1 \le An^{-(s/l-1/p+1/2)}. \quad (3.25)$$

Оценим сумму

$$\sum_{i=1}^{[w \log_2 n]} m_i \le A \sum_{i=1}^{[\mu \log_2 n]} n_i \le A \sum_{i=[\mu \log_2 n]+1}^{w \log_2 n} n_{[\mu \log_2 n]} \le$$

$$\le An^{-(s-l/p+1/2)/(s+1/2)} \log_2 n \le An. \quad (3.26)$$

Из оценок (3.23) — (3.26) следует, что

$$d_n(Q_{r,\gamma,p}(\Omega, M), L_q) \le An^{-(s/l-l/p+1/2)}. \quad (3.27)$$

Оценка снизу поперечника $d_n(Q_{r,\gamma,p}(\Omega, M), L_q)$ получена в теореме 3.5.

Из сопоставления оценок снизу и сверху следует справедливость теоремы в случае, когда $v < l/(l-1)$.

Рассмотрим случай, когда $v > l/(l-1)$. Положим

$$m_i = \begin{cases} s^l n_i - 1 & \text{при } i < [\mu \log_2 n]; \\ s^l n_{[\mu \log_2 n]} & \text{при } [\mu \log_2 n] \le i < [w \log_2 n]; \\ 0 & \text{при } i \ge [w \log_2 n], \end{cases}$$

где

$$\mu = \left(\left(r - \frac{l}{p} + \frac{l}{q} \right) \frac{1}{l-1} - \frac{1}{q} + \frac{1}{2} \right) / \left(s + \frac{v(l-1)}{2} \right),$$

$$w = \left(\left(r - \frac{l}{p} + \frac{l}{q} \right) \frac{1}{l-1} - \frac{1}{q} + \frac{1}{2} \right) / \left(s - \frac{l}{p} + \frac{l}{q} \right).$$

Из теоремы 3.8 следует, что

$$d_n(Q_{r,\gamma,p}(\Omega, M), L_q) \le \sum_1 + \sum_2 =$$

$$= A \sum_{i=[\mu \log_2 n]}^{[w \log_2 n]} 2^{-is} d_{m_i}(B_p^{s^l n_i}, l_q^{s^l n_i}) +$$

$$+ A \sum_{i=[w \log_2 n]+1}^{\infty} 2^{-i(s-l/p+l/q)}. \qquad (3.28)$$

Оценим каждую из этих сумм в отдельности. Очевидно,

$$\sum_2 = A \sum_{i=[w \log_2 n]+1}^{\infty} 2^{-i(s-l/p+l/q)} \le A n^{-w(s-l/p+l/q)} \le$$

$$\le A n^{-(r-l/p+l/q)/(l-1)+1/q-1/2}. \qquad (3.29)$$

Приступим к оценке $\sum_1$, полагая вначале $q = \infty$.

$$\sum_1 = A \sum_{i=[\mu \log_2 n]}^{[w \log_2 n]} 2^{-is} d_{m_i}(B_p^{s^l n_i}, l_\infty^{s^l n_i}) \le$$

$$\le A \sum_{i=[\mu \log_2 n]}^{[w \log_2 n]} 2^{-is} d_{m_i}(B_p^{s^l n_i}, l_\infty^{s^l n_i}) \le \sum_{i=[\mu \log_2 n]}^{[w \log_2 n]} 2^{-is} m_i^{-1/2} \le$$

$$\le A n^{-\mu v(l-1)/2} \sum_{i=[\mu \log_2 n]}^{[w \log_2 n]} 2^{-is} \le A n^{-\mu(v(l-1)/2+s)} \le$$

$$\leq An^{-(r-l/p+l/q)/(l-1)+1/q-1/2}.$$

Так как

$$d_n(Q_{r,\gamma,p}(\Omega, M), L_q) \leq d_n(Q_{r,\gamma,p}(\Omega, M), L_\infty),$$

то

$$\sum_1 \leq An^{-(r-l/p+l/q)/(l-1)+1/q-1/2}. \tag{3.30}$$

Оценим сумму m_i

$$\sum m_i \leq \sum_{i=1}^{[\mu \log_2 n]} m_i + \sum_{i=[\mu \log_2 n]}^{[w \log_2 n]} m_{[\mu \log_2 n]} \leq$$

$$\leq An^{\mu v(l-1)} \log_2 n \leq An^{\sigma} \log_2 n,$$

где

$$\sigma = \left(\frac{r - l/p + l/q}{l-1} - \frac{1}{q} + \frac{1}{2} \right) / \left(\frac{s(r - l/p + l/q)}{(s - l/p + l/q)(l-1)} + \frac{1}{2} \right) < 1.$$

Следовательно,

$$\sum m_i \leq An.$$

Из оценок (3.28) $-$ (3.30) следует, что

$$d_n(Q_{r,\gamma,p}(\Omega, M), L_q) \leq An^{-(r-l/p+l/q)/(l-1)+1/p-1/2}.$$

Оценка сверху получена.

Оценка снизу установлена в теореме 3.5. Из сопоставления оценок снизу и сверху поперечника d_n следует справедливость теоремы при $v > l/(l-1)$.

Теорема доказана.

4. Аппроксимация сплайнами на классе $\mathbf{B}_{\mathbf{r},\gamma}(\mathbf{\Omega}, \mathbf{M})$ функций одной переменной

Пусть $\Omega = [-1, 1]$. Построим локальный сплайн $\varphi_N(t)$, аппроксимирующий функцию $\varphi(t)$ из класса $B_{r,\gamma}(\Omega, M)$ на сегменте $[-1, 1]$.

Разобъем сегмент $[-1, 1]$ на более мелкие сегменты $\Delta_k = [t_k, t_{k+1}]$,
$\overline{\Delta}_k = [\tau_{k+1}, \tau_k]$ точками $t_0 = -1, t_k = -1 + (e^{k-1}/e^N)^v, \tau_0 = 1, \tau_k = = 1 - (e^{k-1}/e^N)^v$, где $k = 1, \ldots, N+1$; причем $v = 1/w, w = 2Me$ при $2Me > 1$ и $v = \ln 2$ при $2Me \leq 1$.

На сегменте Δ_0 (аналогично $\overline{\Delta}_0$) функция $\varphi(t)$ аппроксимируется отрезком ряда Тейлора $\varphi_r(t, \Delta_0, -1)$ $(\varphi_r(t, \bar{\Delta}_0, 1))$; на сегментах Δ_k (аналогично $\bar{\Delta}_k$) функция $\varphi(t)$ аппроксимируется отрезком ряда Тейлора $\varphi_{s-1}(t, \Delta_k, t_k)$, $(\varphi_{s-1}(t, \bar{\Delta}_k, \tau_k))$, где $s = [(r+1-\gamma)N/(2Me)] + 1$ при $w > 1$ и $s = [(r+1-\gamma)N/(1+\log_2 e)] + 1$ при $w \le 1$. Обозначим через $\varphi_N(t)$ локальный сплайн, состоящий из полиномов φ_r и φ_{s-1}.

Оценим погрешность аппроксимации функции $\varphi(t)$ локальным сплайном $\varphi_N(t)$.

Вначале рассмотрим случай, когда $w > 1$.

На сегменте Δ_0 (аналогично $\overline{\Delta}_0$)

$$|\varphi(t) - \varphi_N(t)| \le \frac{CM^{r+1}(r+1)^{r+1}}{(r+1)!} e^{-Nv(r+1-\gamma)} \le Ce^{-(r+1-\gamma)N/2Ae}.$$

На сегментах $\Delta_k (k = 1, 2, \dots, N)$(аналогично $\overline{\Delta}_k$)

$$|\varphi(t) - \varphi_N(t)| \le \frac{CM^s s^s}{s!} h_k^s \left(\frac{e^N}{e^{k-1}}\right)^{(s-r-1+\gamma)v} =$$

$$= \frac{CM^s e^s}{\sqrt{2\pi s}} \frac{e^{(k-1)(r+1-\gamma)v}}{e^{N(r+1-\gamma)v}} (e^v - 1)^s \le \frac{CM^s e^s}{\sqrt{2\pi s}} (e^v - 1)^s \le$$
$$\le \frac{CM^s e^s}{\sqrt{2\pi s}} \left(\frac{2}{w}\right)^s = \frac{C}{\sqrt{s}} e^{-s} = \frac{C}{\sqrt{N}} e^{-(r+1-\gamma)N/(2Ae)}.$$

Так как локальный сплайн $\varphi_N(t)$ имеет $2N+1$ узел, а в каждом узле используются значения функции $\varphi(t)$ и ее производных до $[(r+1-$
$-\gamma)N/2Me] + 1$ порядка включительно, то общее число функционалов, используемое при построении локального сплайна, равно $n = (2N+$
$+1)([(r+1-\gamma)N/2Me]+1)$. Отсюда $N > (1+o(1))\sqrt{Mne/(r+1-\gamma)}$. Следовательно, при $w > 1$

$$\mid \varphi(t) - \varphi_N(t) \mid \le C \exp\left\{-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{(r+1-\gamma)n}{Ae}}\right\}.$$

Пусть теперь $w \le 1$.

На сегменте Δ_0 (аналогично $\overline{\Delta}_0$)

$$\mid \varphi(t) - \varphi_N(t) \mid \le \frac{CM^r r^r}{r!} e^{-N(r+1-\gamma)v} \le Ce^{-(r+1-\gamma)N\ln 2} \le C2^{-(r+1-\gamma)N}.$$

На сегментах $\Delta_k (k = 1, 2, \ldots, N)$ (аналогично $\overline{\Delta}_k$)

$$| \varphi(t) - \varphi_N(t) | \leq \frac{CM^s s^s}{s!} h_k^s \left(\frac{e^N}{e^{k-1}}\right)^{(s-r-1+\gamma)v} = \frac{CM^s e^s}{\sqrt{2\pi s}} (e^v - 1)^s \leq$$

$$\leq \frac{CM^s s^s}{\sqrt{2\pi s}} = \frac{C}{\sqrt{2\pi s}} (2e)^{-s} \leq C 2^{-(r+1-\gamma)N}.$$

Общее число функционалов, используемых при построении сплайна $\varphi_N(t)$ в случае, когда $w < 1$, равно $n = (2N+1)([(r + 1 - \gamma)N/(1 +$
$+ \log e)] + 1) = (1 + o(1))2(r + 1 - \gamma)N/(1 + \log_2 e)$. Отсюда

$$N = (1 + o(1))\sqrt{n(1 + \log e)/2(r + 1 - \gamma)} > (1 + o(1))\sqrt{n/(r + 1 - \gamma)}.$$

Таким образом погрешность аппроксимации при $w < 1$ оценивается неравенством

$$| \varphi(t) - \varphi_N(t) | \leq C 2^{-(r+1-\gamma)N} \leq C 2^{-\sqrt{(r+1-\gamma)n}} \leq C e^{-\sqrt{(r+1-\gamma)n}} \ln 2$$

Выше построен локальный сплайн, составленный из отрезков ряда Тейлора. При этом в построении сплайна участвуют производные достаточно высоких порядков. Таким образом, на практике использование подобных сплайнов затруднительно. Этого неудобства легко избежать, построив локальный сплайн $\varphi_N^*(t)$, составленный из интерполяционных полиномов $P_s[\varphi, \Delta_k]$ и $P_s[\varphi, \bar{\Delta}_k]$, $k = 0, 1, \ldots, N$. Обозначения s, Δ_k и $\bar{\Delta}_k$ $k = 0, 1, \ldots, N-1$, описаны выше, а интерполяционный полином $P_s[\varphi, [a, b]])$ введен во втором разделе этой главы.

Можно показать, что погрешность локального сплайна $\varphi_N^*(t)$ оценивается неравенствами

$$\|\varphi(t) - \varphi_N^*(t) = \begin{cases} C \exp\{-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{(r+1-\gamma)n}{Ae}}\} \ln n & \text{при } w > 1, \\ C 2^{-\sqrt{(r+1-\gamma)n}} \ln n & \text{при } w \leq 1. \end{cases} \tag{4.1}$$

Остановимся теперь на аппроксимации функций, принадлежащих множеству $\bar{B}_{r,\gamma}(\Omega, M)$ локальными сплайнами.

Будем использовать узлы t_k, τ_k, $k = 0, 1, \ldots, N$ и сегменты Δ_k и $\bar{\Delta}_k$, $k = 0, 1, \ldots, N-1$, введенные вначале данного раздела. Пусть $M = [\ln^{1/r} N] + 1$. Покроем сегмент Δ_0 более мелкими сегментами Δ_{0j}, $j = 0, 1, \ldots, M-1$, где $\Delta_{0j} = [t_{0j}, t_{0,j+1}]$, $j = 0, 1, \ldots, M$, $t_{0j} = -1+$
$+jh_0/M$, $j = 0, 1, \ldots, M$, $h_0 = t_1 - t_0$. Аналогичным образом, сегмент $\bar{\Delta}_0$ покрывается сегментами $\bar{\Delta}_{0,j}$, $j = 0, 1, \ldots, M-1$.

В каждом сегменте Δ_{0j} функция $\varphi(t)$ аппроксимируется интерполяционным полиномом $P_r(\varphi, \Delta_{0j})$, $j = 0, 1, \dots, M-1$. Аналогично в каждом сегменте $\bar{\Delta}_{0j}$ функция $\varphi(t)$ аппроксимируется интерполяционным полиномом $P_r(\varphi, \bar{\Delta}_{0j})$, $j = 0, 1, \dots, M-1$. В каждом сегменте Δ_k функция $\varphi(t)$ аппроксимируется интерполяционным полиномом $P_s(\varphi, \Delta_k)$, $k = 0, 1, \dots, M-1$. Аналогично в каждом сегменте $\bar{\Delta}_k$ функция $\varphi(t)$ аппроксимируется интерполяционным полиномом $P_s(\varphi, \bar{\Delta}_k)$, $k = 1, 2, \dots, M-1$. Значения s определены выше. Обозначим через $\varphi_N^{**}(t)$ сплайн, составленный из полиномов $P_r(\varphi, \Delta_{0j})$, $P_r(\varphi, \bar{\Delta}_{0j})$, $j = 0, 1, \dots, M-1$, $P_s(\varphi, \Delta_k)$, $P_s(\varphi, \bar{\Delta}_k)$, $k = 1, 2, \dots, M-1$.

Повторяя рассуждения, приведенные выше при исследовании точности аппроксимации локальными сплайнами функций, принадлежащих множеству $\bar{B}_{r,\gamma}(\Omega, M)$, можно показать, что для $\|\varphi(t) - \varphi_N^{**}(t)\|_C$ справедлива оценка, определяемая правой частью неравенства (4.1).

5. Поперечники класса $\mathbf{B_{r,\gamma}(\Omega, M)}$ функций многих переменных

В этом разделе используются усреднения различных функций. В связи с этим приведем условия, налагаемые на ядра усреднения (см. [75, с. 104]). При этом условие 4) нам понадобится в более сильной форме, нежели в [75].

Наложим на функцию $\omega_h(x, y)$ переменных $x = (x_1, \dots, x_l), y = (y_1, \dots, y_l)$, определенную в R^l и зависящую от параметра h, следующие условия:

1) $\mathrm{supp}\omega_h(x, y) \subset \{(x, y) :\mid x - y \mid < Kh\}, K > 0$, т. е. носитель функции ω_h лежит в «диагональной полоске», ширина которой порядка h;

2) $0 \le \omega_h(x, y) \le Kh^{-l}$;

3) $\int_{R^l} \omega_h(x, y) dy = 1$ (условие нормировки),

4) $\omega_h(x, y)$ имеет непрерывные производные до любого порядка по совокупности переменных x и y, причем

$$\mid D_x^\alpha D_y^\beta \omega_h(x, y) \mid \le KA^v v^v h^{-l-|\alpha|-|\beta|},$$

где $v = \mid \alpha \mid + \mid \beta \mid$.

Возьмем в качестве $\omega(x)$ функцию, имеющую непрерывные производные любого порядка, равную нулю вне куба $[-1, 1]^l$ и удовлетворяющую условию нормировки. Потребуем, чтобы производные функции $\omega(x)$ удовлетворяли неравенствам

$$\left| \frac{\partial^{|v|}\omega(x)}{\partial^{v_1}_{x_1}\cdot\ldots\cdot\partial^{v_l}_{x_l}} \right| \leq A^{|v|} \mid v \mid^{|v|},$$

где $v = (v_1, \ldots, v_l), \mid v \mid= v_1 + \ldots + v_l, A = \mathrm{const}$.

Функцию $\omega_h(x, y)$ можно теперь определить по формуле $\omega_h(x, y) = h^{-l}\omega(\frac{x-y}{h})$.

Теорема 5.1. Пусть $\Omega = [-1, 1]^l, l \geq 2$. Справедлива оценка

$$\delta_n(B_{r,\gamma}(\Omega) \geq An^{-(r+1-\gamma)/(l-1)}. \qquad (5.1)$$

Доказательство. Обозначим через Δ_0 множество точек $x \in \Omega$, расстояние от которых до границы Γ множества Ω удовлетворяет неравенствам

$$0 \leq d(x, \Gamma) = \min_{1\leq i\leq l}\min(\mid -1 - x_i \mid, \mid 1 - x_i \mid) \leq 2^{-N}.$$

Обозначим через $\Delta_k, k = 1, 2, \ldots, N$, множество точек $x \in \Omega$, расстояние от которых до границы Γ множества Ω удовлетворяет неравенствам

$$\frac{2^{k-1}}{2^N} \leq d(x, \Gamma) = \min_{1\leq i\leq l}\min(\mid -1 - x_i \mid, \mid 1 - x_i \mid) \leq \frac{2^k}{2^N}.$$

В каждой области $\Delta_k, k = 0, 1, \ldots, N$, разместим кубы $\Delta^k_{i_1,\ldots,i_l}$ с гранями, параллельными граням куба Ω, и ребрами, имеющими длину $h_k, k = 0, 1, \ldots, N-1, h_0 = 2^{-N}, h_k = 2^{k-1}/2^N, k = 1, \ldots, N-1$. То обстоятельство, что в каждой области $\Delta_k, k = 0, 1, \ldots, N$, может оказаться 2^l параллелепипедов с гранями, параллельными граням куба Ω, не влияет на общность рассуждений. В каждом кубе $\Delta^k_{i_1,\ldots,i_l}, k = 0, 1, \ldots, N$, разместим куб $\Delta^{*k}_{i_1,\ldots,i_l}, k = 0, 1, \ldots, N$, с гранями, параллельными граням куба Ω, центр симметрии которого совпадает с центром симметрии куба $\Delta^k_{i_1,\ldots,i_l}, k = 0, 1, \ldots, N$, а длина ребра h^*_k которого равна $h^*_k = h_k/8$.

Каждому кубу $\Delta^{*k}_{i_1,\ldots,i_l}$ поставим в соответствие функцию

$$L^k_{i_1,\ldots,i_l} = \begin{cases} 1, & x \in \Delta^{*k}_{i_1,\ldots,i_l}, \\ 0, & x \notin \Delta^{*k}_{i_1,\ldots,i_l}. \end{cases}$$

Каждой функции $L^k_{i_1,\ldots,i_l}$ поставим в соответствие среднюю функцию, определяемую формулой:

$$L^{*k}_{i_1,\ldots,i_l}(x) = (h^*_k)^{-l+r+1-\gamma}\int_\Omega \omega\left(\frac{y-x}{h^*_k}\right) L^k_{i_1,\ldots,i_l}(y)dy, \qquad (5.2)$$

где $\omega(\frac{x}{h_k^*})$— ядро усреднения, удовлетворяющее перечисленным выше условиям.

При выполнении этих условий функция $L^{*k}_{i_1,\dots,i_e}(x)$ принадлежит классу $B_{r,\gamma}(\Omega)$. В результате в каждом кубе $\Delta^k_{i_1,\dots,i_l}$ построена функция $L^{*k}_{i_1,\dots,i_l}(x)$, принадлежащая классу $B_{r,\gamma}(\Omega)$, равная нулю вне куба $\Delta^k_{i_1,\dots,i_l}$ и в центре куба $\Delta^k_{i_1,\dots,i_l}$, принимающая значение, не меньшее чем $C2^{-(r+1-\gamma)N}$, причем константа C одна и та же для всех кубов $\Delta^k_{i_1,\dots,i_l}$.

Обозначим через n число кубов $\Delta^k_{i_1,\dots,i_l}$, образующих покрытие области Ω. Оценим число n. Очевидно,

$$1 + m([2^{N+1}])^{l-1} + m\sum_{k=1}^{N-1}\left[\frac{2(1-2^{k-N})}{h_k}\right]^{l-1} \le n \le$$

$$\le 1 + m([2^{N+1}]+1)^{l-1} + m\sum_{k=1}^{N-1}\left(\left[\frac{2(1-2^{k-N})}{h_k}\right]+1\right)^{l-1},$$

где $m = 2^l$.

Нетрудно видеть, что

$$\sum_{k=1}^{N-1}(\frac{1-2^{k-N}}{h_k})^{l-1} \le \sum_{k=1}^{N-1}\left(\frac{2^N-2^k}{2^{k+1}-2^k}\right)^{l-1} \le C2^{N(l-1)}.$$

Следовательно, $n \le C2^{N(l-1)}$.

Аналогичным образом доказывается обратное неравенство $n \ge C2^{N(l-1)}$.

Поэтому

$$n = C2^{N(l-1)}. \tag{5.3}$$

Повторяя неоднократно приводимые рассуждения, имеем $\delta_n(B_{r,\gamma}(\Omega, M) \ge A2^{-N(r+1-\gamma)}$. Учитывая связь между N и n выраженную формулой (5.3), имеем окончательно:

$$\delta_n(B_{r,\gamma}(\Omega), M) \ge Cn^{(-r+1-\gamma)/(l-1)}. \tag{5.4}$$

Теорема доказана.

Построим локальные сплайны, реализующие эту оценку. Один из таких сплайнов построен при $\gamma = 1$ в [22, с $76-80$]. При его построении в каждом кубе $\Delta^k_{i_1,\dots,i_l}$ функция $f(x_1,\dots,x_l)$ аппроксимировалась отрезком ряда Тейлора. В результате локальный сплайн $f_N(x_1,\dots,x_l)$ был разрывным.

Построим локальный сплайн таким образом, чтобы в каждом кубе $\Delta^k_{i_1,\ldots,i_l}$ функция $f(x)$ аппроксимировалась интерполяционными полиномами. Это позволит построить сплайн непрерывный в Ω и тем самым оценить сверху поперечник Колмогорова.

Опишем построение интерполяционных полиномов. Обозначим через $\zeta_1,\ldots,\zeta_r$ узлы полинома Чебышева первого рода степени r, расположенные на сегменте $[-1,1]$. Отобразим сегмент $[\zeta_1,\zeta_r]$ на сегмент $[a,b]$ таким образом, чтобы точка ζ_1 перешла в точку a, а точка ζ_r – в точку b. Обозначим через $\zeta_1^*,\ldots,\zeta_r^*$ образы точек $\zeta_1,\ldots,\zeta_r$ при отображении сегмента $[\zeta_1,\zeta_r]$ на сегмент $[a,b]$. Полином степени $r-1$, интерполирующий функцию $g(t)$ в сегменте $[a,b]$ по узлам $\zeta_1^*,\ldots,\zeta_r^*$ обозначим через $P_r(g,[a,b])$. Пусть $D=[a_1,b_1;\ldots;a_l,b_l]$. Введем в области D интерполяционный полином, определяемый формулой $P_{r,\ldots,r}(f,D)=$
$=P_r^{x_1}(\ldots(P_r^{x_l}(f,[a_l,b_l]),[a_{l-1},b_{l-1}]),\ldots),[a_1,b_1])$, где верхние индексы в $P_r^{x_i}$ обозначают переменную, по которой проводится интерполяция. Таким образом, интерполяционный полином $P_{r,\ldots,r}(f,D)$ строится последовательным интерполированием функции $f(x)$ по переменным $x_i, i=1,\ldots,l$, в сегментах $[a_i,b_i], i=1,\ldots,l$.

Покроем область Ω кубами $\Delta^k_{i_1\cdots i_l}$, $k=0,1,\ldots,N+1$, построение которых подобно описанному при доказательстве теоремы 5.1. Отличие заключается в следующем. Через Δ_0 обозначим множество точек x, удовлетворяющих неравенствам $0\le d(x,\Gamma)\le 2^{-N(r+1-\gamma)/r}$; через Δ_1– множество точек x, удовлетворяющих неравенствам $2^{-N(r+1-\gamma)/r}\le$
$\le d(x,\Gamma)\le 2^{-N}$; через Δ_k, $k=2,\ldots,N$– множества точек x, удовлетворяющих неравенствам $2^{k-1-N}\le d(x,\Gamma)\le 2^{k-N}$, $k=0,1,\ldots,N$. Разбиение на кубы $\Delta^k_{i_1\cdots i_l}$ проводится способом, описанным при доказательстве теоремы 5.1.

Построение локального сплайна начнем с куба Δ^N. В кубе Δ^N функция $f(x)$ интерполируется полиномом $P_{m,\ldots,m}(f,\Delta^N)$, где $m=$
$=[2^{r+1-\gamma}M\sigma(N)N]+1$; $\sigma(N)=(\ln^l N)^{1/N}$.

Перейдем к области Δ^{N-1}. Эта область разбивается на кубы $\Delta^{N-1}_{i_1,\ldots,i_l}$, причем разбиение проводится таким образом, чтобы вершины куба $\Delta^N_{i_1,\ldots,i_l}$ входили в число точек разбиения. В каждом из кубов $\Delta^{N-1}_{i_1,\ldots,i_l}$ функция $f(x)$ интерполируется полиномом $P_{m,\ldots,m}(\overline{f},\Delta^{N-1}_{i_1,\ldots,i_l})$, где $\overline{f}(x)=$
$=P_{m,\ldots,m}(f,\Delta^N)$ на пересечении куба $\Delta^N_{i_1,\ldots,i_l}$ и области Δ^{N-1} и $\overline{f}(x)=$

$= f(x)$ во всех остальных точках куба $\Delta^{N-1}_{i_1,\dots,i_l}$.

Аналогичным образом проводятся построения в кубах $\Delta^k_{i_2,\dots,i_l}$, $k = 0, 1, \dots, N-2$.

Полученный в результате описанных построений сплайн обозначим через $f_N(x)$. Этот сплайн непрерывен в области Ω.

Оценим погрешность аппроксимации функции $f(x)$ сплайном $f_N(x)$.

Пусть $x \in \Delta^0_{i_1,\dots,i_l}$. Тогда

$$\| f(x) - f_N(x) \|_C \leq Ch_0^r \leq C2^{-N(r+1-\gamma)}. \tag{5.5}$$

Пусть $x \in \Delta^k_{i_1,\dots,i_l}$. Тогда, используя при получении оценок производные до N-го порядка, имеем:

$$\| f(x) - f_N(x) \|_C \leq \frac{M^N N^N 2^{k(r+1-\gamma)}}{2^{N(r+1-\gamma)}} \frac{1}{m^N} \ln^l N \leq$$

$$\leq C2^{-N(r+1-\gamma)}. \tag{5.6}$$

Из оценок (5.5), (5.6) имеем

$$\| f(x) - f_N(x) \|_C \leq C2^{-(r+1-\gamma)N}. \tag{5.7}$$

Обозначим через n_1 число функционалов, используемых при построении локального сплайна $f_N(x)$. Очевидно, $n_1 = [Cm^l 2^{N(l-1)}] + 1$. Отсюда, $N = C(\frac{\log_2 n}{l-1} - \frac{l}{l-1} \log_2 \log_2 n_1)$.

Из этого выражения и неравенства (5.7) следует оценка

$$\| f(x) - f_N(x) \|_C \leq Cn_1^{-(r+1-\gamma)/(l-1)}. \tag{5.8}$$

Таким образом, доказано следующее утверждение.

Теорема 5.2. Справедлива оценка

$$d_n(B_{r,\gamma}(\Omega), C) \leq Cn^{-(r+1-\gamma)/(l-1)}.$$

Из сопоставления оценок (5.4) , (5.8) и неравенства $\delta_n \leq 2d_n$, связывающего поперечники Бабенко и Колмогорова, вытекает следующее утверждение.

Теорема 5.3. Справедлива оценка

$$d_n(B_{r,\gamma}(\Omega), C) \asymp Cn^{-(r+1-\gamma)/(l-1)}.$$

В заключение этого раздела построим локальный сплайн $\varphi_N(t)$, аппроксимирующий функцию $\varphi(x) \in \bar{B}_{r,\gamma}(\Omega, M)$. При этом воспользуемся проведенным выше при доказательстве теоремы 5.2 покрытием куба Ω более мелкими кубами $\Delta^k_{i_1,\dots,i_l}$, $k = 0, 1, \dots, N-1$.

Дополнительно каждый из кубов $\Delta^0_{i_1,\dots,i_l}$ разделим на M^l, $M = [N^{1/r}] + 1$ равных частей. Для этого ребра куба $\Delta^0_{i_1,\dots,i_l}$ делятся на M частей и через точки деления проводятся плоскости, параллельные координатным плоскостям. Полученные в результате этих действий кубы обозначим через $\Delta^0_{i_1,\dots,i_l;j_1,\dots,j_l}$. В каждом кубе $\Delta^0_{i_1,\dots,i_l;j_1,\dots,j_l}$ функция $f(x)$ будет приближаться интерполяционным полиномом $P_{r,\dots,r}(f,\Delta^0_{i_1,\dots,i_l;j_1,\dots,j_l})$. В каждом кубе $\Delta^k_{i_1,\dots,i_l}$ функцию $f(x)$ будем приближать интерполяционным полиномом $P_{m,\dots,m}(f,\Delta^k_{i_1,\dots,i_l;j_1,\dots,j_l})$, $k = 0, 1, \dots, N-1$, где m было определено выше при доказательстве теоремы 5.2. Полученный в результате этих построений локальный сплайн обозначим через $f_N(x)$. Повторяя практически дословно доказательство теоремы 5.2, приходим к оценке:

$$\|f(x) - f_N(x)\| \le B2^{-Nr}.$$

Общее число кубов $\Delta^0_{i_1,\dots,i_l;j_1,\dots,j_l}$ и $\Delta^k_{i_1,\dots,i_l}$, $k = 1, 2, \dots, N-1$, равно $CN^{l/r}2^{N(l-1)}$. Общее число функционалов, используемых при построении сплайна $f_N(x)$ равно $n = CN^{(r+l)/r}2^{N(l-1)}$. Таким образом, погрешность аппроксимации функций $f(x) \in \bar{B}_{r,\gamma}(\Omega, M)$, выраженная через используемое число функционалов, оценивается неравенством

$$\|f(x) - f_N(x)\|_C \le B\frac{(\log_2 n)^{(l+r)/(l-1)}}{n^{r/(l-1)}}.$$

Глава 3

ЭНТРОПИЯ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ МНОЖЕСТВ

1. Определения и предварительные сведения

В 1948 г. вышла из печати знаменитая работа К. Шеннона «Математическая теория связи», в которой понятие энтропии было перенесено из статистической физики на теорию передачи информации [101]. В частности, К. Шеннон дал следующее определение энтропии дискретных множеств.

Определение 1.1. [101]. Пусть $X-$ множество, состоящее из n элементов $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Число $H(X) = \log_2 n$ называется энтропией множества X.

Энтропия $H(X)$ множества X определяет число двоичных разрядов, которыми необходимо располагать для того, чтобы можно было бы однозначно выделить из множества X каждый из его элементов.

Поставим множеству X, состоящему из n элементов, в соответствие двоичное число $0, \alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_m$, где $\alpha_i = 0, 1,\ i = 1, 2, \ldots, m$. Всего имеется 2^m различных двоичных чисел вида $0, \alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_m$. Следовательно, выбрав m как наименьшее целое число, удовлетворяющее неравенству $2^m \geq n$, убеждаемся, что $m \geq \log_2 n > m-1$ и $m-1 <$
$< H(X) \leq m$. Таким образом, чтобы каждому элементу множества X поставить в однозначное соответствие двоичное число из множества m-разрядных двоичных чисел $0, \alpha_1\cdots\alpha_m$ достаточно $m = H(X)$ двоичных разрядов, если $n = 2^m$, или $m = [H(X)] + 1$ двоичных разрядов, если n не представимо в виде $n = 2^m$.

Совершенно очевидно, что для передачи информации о множестве X по каналам дискретной связи, достаточно передать двоичное число $0, \alpha_1\cdots\alpha_m$, где $m = [H(X)] + 1$. Как отмечено в [85] идеи К. Шеннона, развитые в работе «Математическая теория связи» послужили толчком для создания А. Н. Колмогоровым нового направления в теории приближений $-$ энтропии компактных множеств в метрических пространствах.

Невозможно представить элементы бесконечного множества двоичными числами $0, \alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_m$ с фиксированным числом разрядов m. Поэтому приходится прибегнуть к приближенному представлению элементов бесконечного множества с точностью $\varepsilon(\varepsilon > 0)$. А. Н. Колмогоров указал два способа приближенного задания с точностью ε элементов множества Ψ метрического пространства X элементами N-мерного $(N(\varepsilon))$ множества X_N.

Первый способ состоит в указании наименьшего числа элементов $N_\varepsilon(\Psi, X)$ в ε-сети множества Ψ в пространстве X и построения самой ε-сети.

Второй способ заключается в построении наиболее экономичного (т. е. имеющего наименьшую мощность) покрытия $\{\psi_j\}$, $j = 1, 2, \dots,$
$N(\varepsilon)$ множества Ψ элементами $\{\psi_j\}$, $j = 1, 2, \dots, N(\varepsilon)$, каждый из которых имеет диаметр 2ε. Наименьшая мощность этого покрытия обозначается через $N_\varepsilon(\Psi)$.

Величины $H_\varepsilon(\Psi, X) = \log_2 N_\varepsilon(\Psi, X)$ и $H_\varepsilon(\Psi) = \log_2 N(\Psi)$ называются соответственно относительной и абсолютной ε-энтропией множества Ψ.

Восстановление функций тесно связано с задачами табулирования. Приведем основные определения, используя материалы работ [32], [82]. Пусть $B-$ банахово пространство, $X \subset B-$ компакт, $x \subset \subset X-$ элемент компакта X. Рассмотрим алфавит, состоящий из двух букв: нуль и единица. Слова, составленные из этих букв, будем называть двоичными словами, таблицей элемента $x \subset X-$ двоичное слово T_x, его длину $N-$ длиной таблицы. Число различных таблиц не превосходит 2^N. Так как $X-$ компакт, то по теореме Хаусдорфа о необходимых и достаточных условиях компактности множества (см. теорему 4.2 из главы 1) для любого $\varepsilon > 0$ существует конечная ε-сеть, и следовательно, с помощью конечного числа двоичных разрядов можно задать элемент x с точностью ε. Будем предполагать, что существует алгоритм, позволяющий по таблице T_x восстановить элемент с точностью ε. Этот алгоритм называется [82] расшифровывающим алгоритмом таблицы. Расшифровывающий алгоритм будет строиться в явном виде в каждом конкретном случае табулирования.

Под таблицей понимается пара: двоичное слово и расшифровывающий алгоритм, который обозначается через R. Точностью таблицы называется величина

$$\varepsilon_x = \|x - R(T_x)\|.$$

Множество таблиц (T_x) данной длины N и расшифровывающий алгоритм R определяют способ табулирования элементов компакта X.

Точностью метода табулирования называется величина

$$\varepsilon = \sup_{x \in X} \varepsilon_x.$$

Возникает задача построения метода табулирования, имеющего заданную точность при минимальном объеме таблицы. Эта задача тесно связана с колмогоровской теорией ε-энтропии.

После этого предварительного обсуждения дадим строгие определения ε-емкости и ε-энтропии функциональных множеств.

Напомним определения и основные результаты теории ε-энтропии.

Конечное множество $S \subset B$ называется ε-сетью для X, если для любого $x \in X$ найдется такой элемент $s \in S$, что $\|x - s\| \leq \varepsilon$. Минимальную мощность ε-сети обозначим $V_\varepsilon(X, B)$.

Конечная система ω замкнутых в компакте X множеств называется 2ε-покрытием X, если объединение элементов этой системы совпадает с X, а диаметр каждого из них не превосходит 2ε. Минимальную мощность 2ε-покрытия обозначим $V_\varepsilon(X)$.

Конечное множество $U \subset X$ называется ε-различимым, если для любых двух элементов $x_1, x_2 \in U$ имеет место неравенство $\|x_1 - x_2\| >$
$> \varepsilon$.

Определение 1.2. Пусть F есть компактное метрическое пространство, а $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_l)-$ его произвольное 2ε-покрытие множествами $\{\alpha_k\}$ из F. Обозначим через $N_\varepsilon(F)$ число элементов наиболее экономного, т. е. состоящего из наименьшего числа множеств $\{\alpha_k\}$,
2ε-покрытия $S_\varepsilon(F)$. Число $H_\varepsilon(F) = \log_2 N_\varepsilon(F)$ называется абсолютной ε-энтропией пространства F.

Связь между длиной таблицы элементов компакта X и его ε-энтропией описывается следующим утверждением [32].

Теорема 1.1. Для того чтобы способ табулирования имел точность ε, объем таблиц должен удовлетворять неравенству

$$N_\varepsilon \geq H_\varepsilon(X).$$

Первый результат по вычислению максимального числа точек в ε- различимом подмножестве множества l переменных, имеющих
.
ограниченные по модулю частные производные, был получен
А. Г. Витушкиным [31]. Исходя из этой работы А. Н. Колмогоров [46] сформулировал общую программу исследования ε-энтропии и ε-емкости компактов в функциональных пространствах. Им же была вычислена ε-энтропия класса $F^{\rho,n}_{s,L,c}$ функций n переменных, имеющих в кубе $\Omega = [0, \rho]^n$ частные производные порядка p, причем производные p-го порядка ограничены константой c и удовлетворяют условиям Гельдера с коэффициентом L и показателем α :

$$A\rho^n \left(\frac{L}{\varepsilon}\right)^{n/s} \leq H_\varepsilon\left(F^{\rho,n}_{s,L,c}\right) \leq B\rho^n \left(\frac{L}{\varepsilon}\right)^{n/s},$$

где A и $B-$ положительные параметры, зависящие лишь от s и n, $s = p + \alpha$.

В монографии [32] А. Г. Витушкиным была вычислена ε-энтропия пространств аналитических функций.

Подробные обзоры результатов по ε-энтропии и ε-емкости компактных множеств содержатся в [47], [82], [99].

В книге [82] исследована ε-энтропия компакта $W_p^r(M,\Omega)\bigcap\{f\in\in C(\Omega):\|f\|_\infty\le N\}$, $\Omega=[-1,1]^l$, $l=1,2,\ldots$, $r=(r_1,\ldots,r_l)$. Показано, что

$$C_0\left(\frac{M}{\varepsilon}\right)^{1/\rho}\le H_\varepsilon\left(W_p^r(M,\Omega)\bigcap\{f\in C(\Omega):\|f_\infty\|\le N)\right)\le$$

$$\le C_1\left(\frac{M}{\varepsilon}\right)^{1/\rho}+r_1\cdots r_l\log\frac{N}{\varepsilon}+D,$$

где $\rho=\left(\sum\limits_{i=1}^{l}r_i^{-1}\right)$; $C_0,\quad C_1,\quad D$ зависят только от r.

В обзорной статье [11] введены новые числовые характеристики, связывающие поперечники и ε-энтропию и поставлен ряд задач о вычислении асимптотики энтропии различных функциональных классов.

Ниже неоднократно будут использоваться следующие утверждения, принадлежащие А. Н. Колмогорову.

Определение 1.3. Пусть $F-$ компактное метрическое пространство, $S_\varepsilon(F)-$ множество из F, состоящее из максимального числа элементов, попарно удаленных друг от друга строго более чем на $2\varepsilon, n_\varepsilon(F)-$ число точек множества $S_\varepsilon(F)$. Число $h_\varepsilon(F)=\log_2 n_\varepsilon(F)$ называется ε-емкостью пространства F.

Теорема 1.2. Для всякого компактного метрического пространства F и числа $\varepsilon>0$ выполняется неравенство

$$H_\varepsilon(F)\ge h_\varepsilon(F),$$

причем множество $S_\varepsilon(F)$ образует в пространстве F 2ε-сеть.

2. Энтропия класса функции $\mathbf{F^{\Omega}_{p,\omega,c}}$

Обозначим через Ω l-мерный параллелепипед в евклидовом пространстве E_l. А. Н. Колмогоровым был введен класс $F^{\rho,l}_{s,L,c}$ функций l переменных, имеющих в кубе $[0,\rho]^l$ частные производные порядка p, удовлетворяющих условию Гельдера с показателем α, $0\le\alpha\le1$, $s=p+\alpha$, коэффициентом L, и таких, что выполняются неравенства:

$$\left|\frac{\partial^{p_1+p_2+\cdots+p_l}f(0)}{\partial t_1^{p_1}\cdots\partial t_l^{p_l}}\right|\le c,\quad p_1+p_2+\cdots+p_l=p.$$

Обобщением этого класса является класс $F^\Omega_{p,\omega,c}$, состоящий из функций, определенных в l-мерном параллелепипеде Ω евклидова

пространства E_l, имеющих частные производные до p-го порядка включительно, удовлетворяющие неравенствам $|\partial^{|k|} f(t)/\partial t_1^{k_1} \cdots \partial t_l^{k_l}| \leq c$, $k =$
$= (k_1, \dots, k_l)$, $|k| = k_1 + \dots + k_l$, $|k| = 0, 1, \dots, p$, и непрерывные частные производные p-го порядка с модулем непрерывности ω.

Зафиксируем произвольное $\varepsilon (\varepsilon > 0)$ и положим $\delta = \delta(\varepsilon)$. Значение δ определяется из уравнения

$$\delta^p \omega(\delta) = \varepsilon. \tag{2.1}$$

Отметим, что если $\omega(\delta) = \delta^\alpha$, $0 < \alpha \leq 1$, то

$$\delta(\varepsilon) = \varepsilon^{1/(p+\alpha)}. \tag{2.2}$$

Теорема 2.1. [99] Справедливы оценки

$$A \left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^{l/(p+\alpha)} \leq H_\varepsilon(F^\Omega_{p,\alpha,c}) \leq D \left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^{l/(p+\alpha)}, \tag{2.3}$$

$$\frac{A}{(\delta(\gamma_1 \varepsilon))^l} \leq H_\varepsilon(F^\Omega_{p,\omega,c}) \leq \frac{D}{(\delta(\gamma_2 \varepsilon))^l}, \tag{2.4}$$

где $A, D, \gamma_1, \gamma_2-$ константы.

При оценке снизу величины $H_\varepsilon(F^\Omega_{p,\alpha,c})$ нам понадобится следующее утверждение (см. [50], с. $187 - 188$).

Лемма 2.1. Пусть $\omega(t)-$ выпуклый вверх модуль непрерывности. Тогда $2\pi/n$-периодическая нечетная функция $f_{n,0}(t)$, определяемая на $[0, \pi/n]$ равенствами

$$f_{n,0}(t) = \begin{cases} \frac{1}{2}\omega(2t), & 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2n}, \\ \frac{1}{2}\omega(2(\frac{\pi}{n} - t)), & \frac{\pi}{2n} \leq t \leq \frac{\pi}{n}, \end{cases}$$

принадлежит классу функций H_ω.

Следствие. Функция

$$f(t) = \begin{cases} \frac{1}{2}(2t)^\alpha, & 0 \leq t \leq 1, \\ -\frac{1}{2}(2|t|)^\alpha, & -1 \leq t \leq 0 \end{cases}$$

принадлежит классу функций $H_\alpha(1)$.

Доказательство теоремы. Положим для определенности $\Omega =$
$= [-1, 1]^l$. Докажем справедливость левой части неравенства (2.3).

Первым рассмотрим одномерный случай. Пусть $N-$ целое число, величина которого будет определена ниже. Разделим сегмент $[-1, 1]$ на $2N$ равных частей точками $x_k = -1 + k/N$,

$k = 0, 1, \ldots, 2N$. Обозначим через Δ_k сегменты $\Delta_k = [x_k, x_{k+1}]$, $k = 0, 1, \ldots, 2N-1$. В каждом сегменте Δ_k определим функцию

$$\varphi_k(t) = \begin{cases} A\frac{((t-x_k)(x_{k+1}-t))^{p+\alpha}}{(x_{k+1}-x_k)^{p+\alpha}} & \text{при} \quad x_k \le t \le x_{k+1}, \\ 0 & \text{при остальных значениях} \quad t, \end{cases}$$

где константа A подбирается таким образом, что функция

$$\psi(\lambda, t) = \sum_{k=0}^{2N-1} \lambda_k \varphi_k(t),\ \lambda_k = \pm 1,$$

принадлежит классу функций $F^{\Omega}_{p,\alpha,c}$. Здесь $\lambda = (\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_{2N-1})$. Из следствия к лемме 2.1 и элементарных подсчетов можно заключить, что такая константа существует.

Из определения функций $\varphi_k(t)$ легко видеть, что на каждом сегменте Δ_k, $k = 0, 1, \ldots, 2N-1$, $\max\limits_{t \in \Delta_k} |\varphi_k(t)| = A\left(\frac{1}{N}\right)^{p+\alpha}$.

Положим $\varepsilon = AN^{-(p+\alpha)}$. Из определения множества функций $\psi(\lambda, t)$ следует, что расстояние между двумя различными функциями из этого множества не меньше 2ε. Общее число различных функций в множестве функций $\psi(\lambda, t)$, $\lambda_k = \pm 1$, $k = 0, 1, \ldots, 2N-1$, равно 2^{2N}. Поэтому ε-емкость множества функций $F^{\Omega}_{p,\alpha,c}$ не меньше $2N$. Из теоремы Колмогорова следует, что $H_\varepsilon(F^{\Omega}_{p,\alpha,c}) \ge 2N$, и, учитывая соотношение $\varepsilon = AN^{-(p+\alpha)}$, получаем оценку снизу:

$$H_\varepsilon(F^{\Omega}_{p,\alpha,c}) \ge A\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^{1/(p+\alpha)} \tag{2.5}$$

в одномерном случае.

Докажем справедливость левой части оценки (2.3) в многомерном случае. Пусть $\Omega = [-1, 1]^l$. Введем узлы $x^j_k = -1 + k/N$, $k = 0, 1, \ldots, 2N$, $j = 1, 2, \ldots, l$, и покроем область Ω кубами

$$\Delta_{k_1 \cdots k_l} = [x^1_{k_1}, x^1_{k_1+1}, \ldots, x^l_{k_l}, x^l_{k_l+1}],$$

$k_i = 0, 1, \ldots, 2N-1$, $i = 1, 2, \ldots, l$.

Каждому кубу $\Delta_{k_1 \cdots k_l}$ поставим в соответствие функцию

$$\varphi(t_1, \ldots, t_l, \Delta_{k_1 \cdots k_l}) =$$

$$= \begin{cases} A\frac{((t_1-x_{k_1})(x_{k_1+1}-t_1)\cdots(t_l-x_{k_l})(x_{k_l+1}-t_l)))^{p+\alpha}}{h^{(2l-1)(p+\alpha)}} & \text{при} \quad (t_1, \ldots, t_l) \in \Delta_{k_1 \cdots k_l}, \\ 0 & \text{при} \quad (t_1, t_2, \ldots, t_l) \in \Omega \backslash \Delta_{k_1 \cdots k_l}. \end{cases}$$

Здесь $h = 1/N$, константа A подбирается таким образом, чтобы определяемая ниже функция $\psi(\lambda, t_1, \ldots, t_l) \in F^{\Omega}_{p,\alpha,c}$. Можно показать, что такая константа существует.

Введем множество функций

$$\psi(\lambda, t_1, \ldots, t_l) = \sum_{k_1=0}^{2N-1} \cdots \sum_{k_l=0}^{2N-1} \varphi(t_1, \ldots, t_l, \Delta_{k_1 \cdots k_l}) \lambda_{k_1 \cdots k_l},$$

где $\lambda_{k_1 \cdots k_l} = \pm 1$.

Нетрудно видеть, что

$$\max_{(t_1,\ldots,t_l) \in \Delta_{k_1 \cdots k_l}} \varphi(t_1, \ldots, t_l; \Delta_{k_1 \cdots k_l}) = A \left(\frac{1}{N}\right)^{p+\alpha}$$

во всех кубах $\Delta_{k_1 \cdots k_l}$, $k_i = 0, 1, \ldots, 2N-1$, $i = 1, 2, \ldots, l$.

Положим $\varepsilon = AN^{-(p+\alpha)}$. Построенное множество функций $\psi(\lambda, t_1, \ldots, t_l)$ состоит из $2^{(2N)^l}$ различных функций, расстояние между которыми не меньше 2ε. Следовательно, ε-емкость этого множест-
ва равна $(2N)^l$, и, тем более, ε-емкость множества $F^{\Omega}_{p,\alpha,c}$ не меньше $(2N)^l = A\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^{l/(p+\alpha)}$. Из теоремы Колмогорова о связи ε-емкости и ε-энтропии функциональных классов следует, что

$$H_{\varepsilon}(F^{\Omega}_{p,\alpha,c}) \geq A \left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^{l/(p+\alpha)}. \qquad (2.6)$$

Левая часть оценки (2.3) доказана.

Левая часть неравенства (2.4) доказывается аналогично, но технически более сложно.

Приступим к оценке сверху ε-энтропии классов функций $F^{\Omega}_{p,\alpha,c}$ и $F^{\Omega}_{p,\omega,c}$. При этом подробное доказательство проведем для неравенства (2.3). Вначале, следуя [99], рассмотрим случай, когда $l = 1$.

Зафиксируем произвольное $\varepsilon (\varepsilon > 0)$ и определим $\delta(\varepsilon)$ из уравнения (2.1). Разделим сегмент $[-1, 1]$ на N равных частей, длиной не превышающих $\delta(\varepsilon)$ ($N-$ целое число), точками $x_k = -1 + \frac{2}{N}k$, $k = 0, 1, \ldots, N$. Обозначим через h длину сегментов $\Delta_k = [x_k, x_{k+1}]$, $k = 0, 1, \ldots, N-1$.

Построим 2ε-покрытие множества $F^{\Omega}_{p,\omega,c}$. Для этого в каждом сегменте Δ_j, $j = 0, 1, \ldots, N-1$, будем использовать формулу Тейлора, которую представим в следующем виде:

$$f(t) = \sum_{k=0}^{p} \frac{f^{(k)}(x_j)}{k!}(t - x_j)^k + \frac{f^{(p)}(\xi) - f^{(p)}(x_j)}{p!}(t - x_j)^p, \qquad (2.7)$$

где $x_j < \xi < t$.

Оценим с какой точностью нужно задавать значения $f^{(k)}(x_j)$, $k =$
$= 0, 1, \dots, p$, для того, чтобы в сегменте Δ_j, $j = 0, 1, \dots, N-1$, любая функция из класса $F^{\Omega}_{p,\omega,c}$ была восстановлена по формуле (2.7) с точностью ε.

Предположим, что значения $f^{(k)}(x_j)$, $k = 0, 1, \dots, p$, в произвольном узле x_j, $j = 0, 1, \dots, N$, заданы с точностью $\varepsilon_k = h^{p-k}\omega(h)$, $h \le \delta(\varepsilon)$.

Будем вычислять функцию $f(t)$ в сегменте Δ_j по формуле

$$\bar{f}(t) = \sum_{k=0}^{p} \frac{\bar{f}^{(k)}(x_j)}{k!}(t - x_j)^k, \tag{2.8}$$

где $|f^{(k)}(x_j) - \bar{f}^{(k)}(x_j)| \le \varepsilon_k$, $k = 0, 1, \dots, p$.

Тогда погрешность в аппроксимации функции $f(t) \in F^{\Omega}_{p,\omega,c}$, возникающая из-за того, что значения $f^{(k)}(x_j)$ заданы с точностью ε_k, $k = 0, 1, \dots, p$, на сегменте Δ_j оценивается неравенством:

$$\Delta_j f \le \sum_{k=0}^{p} \frac{\varepsilon_k}{k!} h^k + \frac{h^p \omega(h)}{p!} \le$$

$$\le \sum_{k=0}^{p} \frac{h^p \omega(h)}{k!} + \frac{h^p \omega(h)}{p!} = h^p \omega(h) \left[\sum_{k=0}^{p} \frac{1}{k!} + \frac{1}{p!} \right] \le 4\varepsilon,$$

где $\Delta_j f = \max\limits_{t \in \Delta_j} |f(t) - \bar{f}(t)|$.

Аналогично при аппроксимации производных $f^{(k)}(t)$, $k = 1, 2, \dots, p$, в сегменте Δ_j по формуле $\bar{f}^{(k)}(t) = \sum\limits_{l=k}^{p} \frac{\bar{f}^{(l)}(x_j)}{(l-k)!}(t - x_j)^{l-k}$ возникает погрешность, оцениваемая неравенством:

$$\Delta_j f^{(k)} \le \sum_{l=k}^{p} \frac{\varepsilon_l h^{l-k}}{(l-k)!} + \frac{h^{p-k}\omega(h)}{(p-k)!} =$$

$$= h^{p-k}\omega(h) \left[\sum_{l=k}^{p} \frac{1}{(l-k)!} + \frac{1}{(p-k)!} \right] \le 4\varepsilon_k.$$

Здесь $\Delta_j f^{(k)} = \|f^{(k)}(t) - \bar{f}^{(k)}(t)\|_{C(\Delta_j)}$.

Эти рассуждения можно сформулировать в виде следующего утверждения, в котором использованы приведенные выше обозначения.

Лемма 2.2. Пусть $f_1(t)$ и $f_2(t)$– две функции, принадлежащие классу функций $F^{\Omega}_{p,\omega,c}$. Если в некоторой точке t выполнены условия

$$|f_1^{(k)}(t) - f_2^{(k)}(t)| \leq \varepsilon_k,$$

$k = 0, 1, \ldots, p$, то при $t' \in [t - \delta, t + \delta]$ справедлива оценка

$$|f_1^{(k)}(t') - f_2^{(k)}(t)| \leq 4\varepsilon_k.$$

Таким образом, если в каждой точке x_j, $j = 0, 1, \ldots, N$, будут заданы значения $f^{(k)}(x_j)$, $k = 0, 1, \ldots, p$, с точностью ε_k, то множество функций $f(t) \in F^{\Omega}_{p,\omega,c}$, определяемых в сегментах $[x_0, x'_0]$, $[x'_{j-1}, x'_j]$, $j =$
$= 1, 2, \ldots, N-1$, $[x'_{N-1}, x_N]$, где $x'_j = (x_j + x_{j+1})/2$, по формуле (2.8), образует 2ε-покрытие класса функций $F^{\Omega}_{p,\omega,c}$.

В самом деле, если параметр t изменяется в пределах от нуля до $h/2(x_j - \frac{h}{2} \leq h \leq x_i + \frac{h}{2})$, $j = 0, 1, \ldots, N-1$, то

$$\varepsilon^* = |f(t) - \sum_{k=0}^{p} \frac{\bar{f}^{(k)}(x_j)}{k!}(t - x_j)^k| \leq$$

$$\leq \sum_{k=0}^{p} \frac{\varepsilon^k}{k!}\left(\frac{h}{2}\right)^k + \left(\frac{h}{2}\right)^p \frac{\omega\left(\frac{h}{2}\right)}{p!} \leq$$

$$\leq h^p \omega(h) \left[\sum_{k=0}^{p} \frac{1}{2^k k!} + \frac{1}{2^p p!}\right].$$

Если $p = 1$, то $\varepsilon^* \leq 2\varepsilon$.

Если $p \geq 2$, то

$$\varepsilon^* \leq \varepsilon \left[\sum_{k=0}^{p} \frac{1}{2^k k!} + \frac{1}{2^p p!}\right] =$$

$$= \varepsilon \left[1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2 2!} + \cdots + \frac{1}{2^{p-1}(p-1)!} + \frac{2}{2^p p!}\right] <$$

$$< \varepsilon \left[1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^p}\right] < 2\varepsilon.$$

Для задания значений $f^{(k)}(x_l)$, $k = 0, 1, \ldots, p$, $l = 0, 1, \ldots, N$, введем матрицу $M = \{m_{kl}\}$, $k = 0, 1, \ldots, p$, $l = 0, 1, \ldots, N$, с целыми значениями m_{kl}, диапазон изменения которых будет указан ниже.

Каждой матрице M поставим в соответствие множество $U(M)$, состоящее из функций, принадлежащих $F^{\Omega}_{p,\omega,c}$ и таких, что

$$m_{kj}\varepsilon_k \leq f^{(k)}(x_j) < (m_{kj}+1)\varepsilon_k.$$

Нетрудно видеть, что диаметр каждого множества $U(M)$ не превосходит 2ε. Определим диапазоны, в которых должны изменяться значения m_{kl} для того, чтобы множества $U(M)$ покрывали класс функций $F^{\Omega}_{p,\omega,c}$. По определению класса функций $F^{\Omega}_{p,\omega,c}$ для каждой функции из этого класса справедливо неравенство $\|f(t)\|_C \leq c$. Следовательно, для задания значения $f(x_0)$ с точностью ε_0 нужно $[2\frac{c}{\varepsilon_0}]+$
$+1$ целое число m_{00}. Аналогично для задания значения производной $f^{(j)}(t)$ в точке x_0 с точностью ε_j необходимо располагать $[2\frac{c}{\varepsilon_j}]+1$ целым числом m_{j0}. Таким образом, учитывая, что $\varepsilon_j > \varepsilon_0$, $j=1,2,\dots,p$, для задания столбца m_{i0}, $i=0,1,\dots,p$, нужно задать не более $(p+$
$+1)([2\frac{c}{\varepsilon_0}]+1)$ целых чисел. Из леммы 2.1 следует, что при переходе от точки x_0 к точке x_1 погрешность увеличивается в 4 раза. Следовательно, для каждого фиксированного первого столбца число возможных вторых столбцов равно 5^{p+1}. Продолжая этот процесс легко заметить, что общее число всевозможных матриц M с целочисленными коэффициентами, которые образуют покрытие множества функций $F^{\Omega}_{p,\omega,c}$, не превосходит $(p+1)(2\left[\frac{c}{\varepsilon_0}\right]+1)5^{N(p+1)}$. Отсюда следует, что

$$H_{2\varepsilon} = \log_2\left((p+1)\left(2\left[\frac{c}{\varepsilon}\right]+1\right)5^{N(p+1)}\right) \asymp$$

$$\asymp \left(\log_2\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)+N\right) = \left(\log_2\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)+\frac{b-a}{\delta(\varepsilon)}\right) \asymp \left(\frac{1}{\delta(\varepsilon)}\right).$$

Таким образом доказана справедливость неравенства (2.4) и, учитывая равенство (2.2), справедливость неравенства (2.3).

Рассмотрим оптимальный по памяти метод восстановления функций, принадлежащих классу функций $W^p(1)$.

Исследуем, какой объем информации о значениях функции $f(t) \in$
$\in W^p(1)$ и ее производных до p-го порядка в точке $x_0=-1$ необходимо запомнить, чтобы на сегменте $[-1,1]$ восстановить функцию $f(t)$ с точностью ε. Из леммы 2.2 следует, что для восстановления

функции $f(t)$ в сегменте $[x_k, x'_k]$ с точностью ε необходимо располагать значениями $f^{(j)}(x_k)$ с точностью $\varepsilon_j/4$, $j = 0, 1, \ldots, p$. Следовательно, для того чтобы восстановить функцию $f(t)$ с точностью ε на сегменте $[x_{N-1}, 1]$, нужно в точке $x_0 = -1$ задать значения $f^{(j)}(x_0)$ с точностью $\varepsilon_j^0 = \varepsilon_j/4^N$, где $\varepsilon_0 = \varepsilon$. Выше отмечалось, что $\varepsilon_j = h^{p-j}\omega(h)$. Так как необходимо запомнить конечное число производных $f^{(j)}(x_0)$, $j = 0, 1, \ldots, p$, можно положить $\varepsilon_j^0 = \varepsilon_0^0 = \varepsilon/4^N$. Следовательно, для восстановления функции $f(t)$ в сегменте $[-1, 1]$ с точностью ε достаточно запомнить $(p + 1)$ число с точностью $\varepsilon/4^N$. Так как значения функции $f(t)$ и ее производных до p-го порядка ограничены по модулю в сегменте $[-1, 1]$ константой c, то для этого требуется $2(p + 1)c4^N/\varepsilon$ чисел. Для запоминания этих чисел в двоичной системе исчисления требуется m двоичных разрядов, где m определяется из неравенств $2^{m-1} < 2(p+1)c4^N/\varepsilon \leq 2^m$. Отсюда

$$m \asymp \left(N + \log_2 \frac{1}{\varepsilon}\right) = \frac{2}{h} + \log_2 \frac{1}{\varepsilon} \asymp \frac{1}{\delta(\varepsilon)} + \log_2 \frac{1}{\varepsilon} \asymp \frac{1}{\delta(\varepsilon)}.$$

Здесь $\delta(\varepsilon)-$ решение уравнения (2.1). В случае, если p-я производная принадлежит классу Гельдера H_α, то из (2.2) следует, что

$$m \asymp \left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^{1/(p+\alpha)}. \qquad (2.9)$$

Из сопоставления оценок (2.3) и (2.9) видно, что длина таблицы, необходимой для восстановления функции $f(t)$ на сегменте $[-1, 1]$ с точностью ε, совпадает по порядку с величиной ε-энтропии. Таким образом, построен оптимальный по порядку по памяти метод восстановления функций из класса $W^p(1)$.

Проведем теперь доказательство для функций многих переменных. При этом ограничимся функциями двух переменных, так как распространение полученных результатов на случай функций l переменных $(l = 3, 4, \ldots)$ не вызывает затруднений.

Зафиксируем произвольное $\varepsilon (\varepsilon > 0)$ и определим $\delta(\varepsilon)$ из уравнения (2.1). Положим $h \leq \frac{\delta(\varepsilon)}{2}$ и разделим каждую сторону квадрата $\Omega =$
$= [-1, 1]^2$ на N равных частей длиной h. Пусть $x_k = -1 + \frac{2}{N}k$, $k =$
$= 0, 1, \ldots, N$. Покроем квадрат Ω квадратами $\Delta_{kl} = [x_k, x_{k+1}; x_l, x_{l+1}]$, $k, l = 0, 1, \ldots, N - 1$.

Введем обозначение $x'_k = (x_k + x_{k+1})/2$, $k = 0, 1, \ldots, N - 1$. Покроем квадрат Δ_{kl} более мелкими квадратами Δ_{kl}^j, $j = 1, 2, 3, 4$, со сторонами, параллельными координатным осям и равными $h/2$. Нумерацию квадратов Δ_{kl}^{j} по индексу $j (j = 1, 2, 3, 4)$ будем проводить против часовой стрелки.

В квадрате $\Delta_{kl}(k, l = 0, 1, \dots, N-1)$ функцию $f(t_1, t_2)$ представим в виде

$$f(t_1, t_2) = f(x_k, x_l) + \frac{1}{1!} df(x_k, x_l) + \cdots + \frac{1}{p!} d^p f(x_k, x_l) +$$

$$+ \frac{1}{p!}(d^p f(x_k + \Theta h, x_l + \Theta h) - d^p f(x_k, x_l)).$$

Пусть значение $f(x_k, x_l)$ вычислено с точностью $\varepsilon_0 = h^p \omega(h)$, а значения частных производных порядка $|v|$ $\partial^{|v|} f(t_1, t_2)/\partial t_1^{v_1} \partial t_2^{v_2}$, $v =$
$= (v_1, v_2)$, $|v| = v_1 + v_2$, вычислены с точностью $\varepsilon_{|v|} = h^{p-|v|}\omega(h)$.

Функцию $f(t_1, t_2)$ будем аппроксимировать в квадрате Δ_{kl} отрезком ряда Тейлора

$$\bar{f}(t_1, t_2) = \bar{f}(x_k, x_l) + \frac{1}{1!} d\bar{f}(x_k, x_l) + \cdots + \frac{1}{p!} d^p \bar{f}(x_k, x_l), \qquad (2.10)$$

где через $d^k \bar{f}$ обозначен дифференциал k-го порядка, в котором все частные производные k-го порядка вычислены с точностью ε_k.

Определим погрешность $\Delta_{kl} f(t_1, t_2)$, с которой восстанавливается функция $f(t_1, t_2)$ в квадрате Δ_{kl}.

Очевидно

$$|\Delta_{kl} f(t_1, t_2)| \le \varepsilon_0 + \frac{h}{1!} 2\varepsilon_1 + \frac{h^2}{2!} 3\varepsilon_2 + \cdots + \frac{h^p}{p!}(p+1)\varepsilon_p +$$

$$+ \frac{1}{p!}(p+1) h^p \omega(h) = h^p \omega(h) \left(1 + \frac{2}{1!} + \frac{3}{2!} + \cdots + \frac{2(p+1)}{p!}\right) =$$

$$= C_p h^p \omega(h),$$

где $C_p = 1 + \frac{2}{1!} + \frac{3}{2!} + \cdots + \frac{p}{(p-1)!} + \frac{2(p+1)}{p!}$.

Аналогичным образом можно показать, что функция $f_v(t_1, t_2) =$
$= \partial^{|v|} f(t_1, t_2)/\partial t_1^{v_1} \partial t_2^{v_2}$, представимая в квадрате Δ_{kl} формулой

$$f_v(t_1, t_2) = f_v(x_k, x_l) + \frac{1}{1!} df_v(x_k, x_l) +$$

$$+ \cdots + \frac{1}{(p-|v|)!} d^{p-|v|} f_v(x_k, x_l) +$$

$$+\frac{1}{(p-|v|)!}(d^{p-|v|}f_v(x_k+\Theta h, x_l+\Theta h)-d^{p-|v|}f_v(x_k,x_l)),$$

может быть восстановлена в этом же квадрате по формуле

$$\bar{f}_v(t_1,t_2)=\bar{f}_v(x_k,x_l)+\frac{1}{1!}d\bar{f}_v(x_k,x_l)+\cdots+\frac{1}{(p-|v|)!}d^{p-|v|}\bar{f}_v(x_k,x_l) \tag{2.11}$$

с точностью

$$|\Delta_{kl}f_v(t_1,t_2)|\le\varepsilon_{|v|}+\frac{h}{1!}2\varepsilon_{|v|+1}+\cdots+$$

$$+\frac{h^{p-|v|}}{(p-|v|)!}\varepsilon_p(p+1-|v|)+\frac{h^{p-|v|}}{(p-|v|)!}(p-|v|+1)\omega(h)=$$

$$=h^{p-|v|}\omega(h)\left(1+\frac{2}{1!}+\cdots+\frac{2(p+1-|v|)}{(p-|v|)!}\right)=$$

$$=C_p^{|v|}h^{p-|v|}\omega(h).$$

Последнее неравенство справедливо при $|v|=1,2,\ldots,p$.

Очевидно, что при всех $p(1\le p<\infty)$ константы $C_p^{|v|}$ ограничены одним и тем же числом C_*.

Таким образом, в квадрате Δ_{kl} $|\Delta_{kl}f(t_1,t_2)|\le C_*h^p\omega(h)$, $|\Delta_{kl}f_v(t_1,t_2)|\le C_*h^{p-|v|}\omega(h)$, $|v|=1,2,\ldots,p$.

Обозначим $x_{kl}=(x_k,x_l)$, $k,l=0,1,\ldots,N$.

Из последних двух неравенств следует, что если значения функции $f(t_1,t_2)$ и ее частных производных в точке x_{00} заданы с точностью $\varepsilon_{|v|}$, $|v|=0,1,\ldots,p$, то в точках x_{01},x_{10},x_{11} они восстанавливаются с точностью $C_*\varepsilon_{|v|}$.

В квадрате Δ_{00}^1 функцию $f(t_1,t_2)$ будем вычислять по формуле

$$f(t_1,t_2)=\bar{f}(x_{00})+\frac{1}{1!}d\bar{f}(x_{00})+\cdots+\frac{1}{p!}d^p\bar{f}(x_{00}).$$

В квадрате Δ_{00}^j, $j=2,3,4$ функция $f(t_1,t_2)$ вычисляется по предыдущей формуле, в которой x_{00} заменено на x_{01},x_{11},x_{10} соответственно.

Аналогичным образом функция $f(t_1,t_2)$ вычисляется в квадратах Δ_{kl}^j, $j=1,2,3,4$, $k,l=0,1,\ldots,N-1$.

Поставим в соответствие сетке узлов $x_{k,l}$, $k,l=0,1,\ldots,N$, целочисленную матрицу $M=\{m_{ikl}\}$, где $i=0,1,\ldots,s$, $s=$

$(p+1)(p+2)/2$. Теория многомерных матриц развита Н. П. Соколовым [77]. Для наших целей достаточно представить ее как таблицу

$$s \times (N+1) \times (N+1),$$

где каждому узлу x_{kl} ставится в соответствие вектор-столбец размера m, содержащий целочисленные значения m_{ikl}.

В обозначении m_{ikl} второй и третий индексы означают номер узла x_{kl}, $k, l = 0, 1, \dots, N$.

Первый индекс в обозначении m_{ikl} определяет частную производную функции $f(t_1, t_2)$, в точке x_{kl} значение которой задается константой m_{ikl}. Например, с индексом $i = 0$ связано задание значения $f(x_{kl})$, с индексом $i = 1-$ задание значения $\partial f(x_{kl})/\partial t_1$ и т. д.

Каждой матрице M поставим в соответствие множество функций $U(M)$, принадлежащих $F^{\Omega}_{p,\omega,c}$ и таких, что

$$m_{0kl}\varepsilon_0 \leq f(x_{kl}) < (m_{0kl}+1)\varepsilon_0,$$

$$m^0_{1kl}\varepsilon_1 \leq \frac{\partial f(x_{kl})}{\partial t_1} < (m^0_{1kl}+1)\varepsilon_1,$$

$$m^1_{1kl}\varepsilon_1 \leq \frac{\partial f(x_{kl})}{\partial t_2} < (m^1_{1kl}+1)\varepsilon_1,$$

$$\cdots$$

$$m^p_{pkl}\varepsilon_p \leq \frac{\partial^p f(x_{kl})}{\partial t_2^p} < (m^p_{pkl})\varepsilon_p.$$

Выше было показано, что диаметр каждого множества $U(M)$ равен $2C_*\varepsilon_0$. Полагая $\varepsilon_0 = \varepsilon$ и используя всевозможные матрицы M с целочисленными элементами, образуем покрытие $F^{\Omega}_{p,\omega,c}$ множествами с диаметром $2C_*\varepsilon$. Определим минимальное число матриц M, необходимых для построения такого покрытия. Так как по определению класса $F^{\Omega}_{p,\omega,c}$ в области Ω значения функции и ее производных не превышают по модулю константы c, то для определения в точке x_{00} значений функции $f(t_1, t_2)$ и ее производных до p-го порядка с точностью $\varepsilon_{|v|}$, $|v| = 0, 1, \dots, p$, требуется не более $s(2[\frac{c}{\varepsilon_0}]+1)$ целых чисел (здесь положено $\varepsilon_0 \leq \varepsilon_{|v|}$).

Пусть значения функции $f(t_1, t_2)$ и ее производных до p-го порядка в точке x_{00} задаются вектором, состоящим из $s = (p+2)(p+1)/2$ целочисленных значений $M_{00} = (m^1_{00}, m^2_{00}, \dots, m^s_{00})$. Тогда для представления значений функции $f(t_1, t_2)$ и ее производных до p-го порядка, вычисленных в точке x_{01} (аналогично в точке x_{10}) по формулам (2.10) и (2.11), требуется $(C_*+1)^s$ векторов с целочисленными значениями. Продолжая этот процесс, убеждаемся, что для представления функции $f(t_1, t_2)$ с точностью ε_0 в каждой из точек x_{kl} требуется дополнительно запомнить $(C_0+1)^s$ векторов с целочисленными коэффициентами. Число таких точек $-(N^2-1)$, а общее число всевозможных векторов с целочисленными коэффициентами, возникающих при описанном выше построении, равно:

$$O((C_*+1)^{N^2 s}).$$

Отсюда следует, что общее число матриц M с целочисленными коэффициентами, достаточное для того, чтобы множество $U(M)$ покрывало $F^{\Omega}_{p,\omega,c}$, равно $A(C_*+1)^{N^2 s} s \left(2\left[\frac{C}{\varepsilon}\right]+1\right)$.

Таким образом, ε-энтропия множества $F^{\Omega}_{p,\omega,c}$ оценивается величиной

$$H_{c,\varepsilon}(F^{\Omega}_{p,\omega,c}) \le AN^2 = A\frac{1}{(\delta(\varepsilon))^2}.$$

В случае, если $\omega(\delta)=\delta^{\alpha}$, в соответствии с формулой (2.2) имеем

$$H_{C_*\varepsilon}(F^{\Omega}_{p,\alpha,c}) \le A\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^{\frac{2}{p+\alpha}}.$$

Из последних двух неравенств следует, что

$$H_{\varepsilon}(F^{\Omega}_{p,\omega,c}) \le \frac{A}{\delta(\varepsilon/C_*)^2}$$

в общем случае и

$$H_{\varepsilon}(F^{\Omega}_{p,\alpha,c}) \le A\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^{2/(p+\alpha)}$$

при $\omega(\delta)=\delta^{\alpha}$.

Легко видеть, что если $\Omega-$ l-мерный параллелепипед, то предыдущие оценки имеют вид

$$H_{\varepsilon}(F^{\Omega}_{p,\omega,c}) \le A\left(\frac{1}{\delta(\varepsilon/C_*)}\right)^{l}$$

в общем случае,

$$H_{\varepsilon}(F^{\Omega}_{p,\alpha,c}) \le A\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^{l/(p+\alpha)}$$

в случае, когда $\omega(\delta)=\delta^{\alpha}$.

Из сопоставления этих оценок с оценками снизу следует, что ε-энтропия множества функций $F^{\Omega}_{p,\omega,c}$ вычислена в слабой асимптотике.

Замечание. Выше был изложен метод вычисления ε-энтропии функциональных множеств, основанный на построении их 2ε-покрытий. Метод вычисления ε-энтропии, основанный на построении ε-сетей функциональных множеств, был ранее развит А. Г. Витушкиным [32].

3. Энтропия класса функций $\mathbf{Q_{r,\gamma}([-1,1],M)}$

Вначале рассмотрим класс функций $Q_{r\gamma}(\Omega, M)$ при $\gamma-$ целом числе.

Пусть $\Omega = [-1,1]$. На сегменте $[-1,1]$ введем узлы $t_k = -1 + +(k/N)^v$, $k = 0,1,\ldots,N$, $t_k = 1-((2N-k)/N)^v$, $k = N+1,\ldots,2N$, где $v = s/(s-\gamma)$. Обозначим через Δ_k сегменты $\Delta_k = [t_k, t_{k+1}]$, а через h_k числа $h_k = t_{k+1} - t_k$, $k = 0,1,\ldots,2N-1$.

Пусть в точке $t_N = 0$ заданы значения функции $f(0)$ и ее производных $f^{(k)}(0)$ с точностью ε_k, $k = 0,1,\ldots,s$. В любой точке t сегмента Δ_N функция $f(t)$ равна

$$f(t) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}t + \cdots + \frac{f^{(s)}(0)}{s!}t^s + \frac{f^{(s)}(\Theta t) - f^{(s)}(0)}{s!}t^s. \quad (3.1)$$

Будем вычислять функцию $f(t)$ в сегменте Δ_N по формуле

$$\bar{f}(t) = \bar{f}(0) + \frac{\bar{f}'(0)}{1!}t + \cdots + \frac{\bar{f}^{(s)}(0)}{s!}t^s, \quad (3.2)$$

где $\bar{f}(0)$ и $\bar{f}^{(k)}(0)-$ значения $f(0)$ и $f^{(k)}(0)$, вычисленные с точностью ε_0 и ε_k, $k = 1,2,\ldots,s$, соответственно.

Оценим погрешность, которая возникает при переходе от формулы (3.1) к формуле (3.2). Очевидно,

$$|\Delta_N f(t)| = |f(t) - \bar{f}(t)| \le \sum_{l=0}^{s} \frac{\varepsilon_l}{l!}h_N^l + \max_{t\in\Delta_N}|f^{(s)}(t)|\frac{2h_N^s}{s!} \le$$

$$\le \sum_{l=0}^{s} \frac{\varepsilon_l}{l!}\left(1 - \left(\frac{N-1}{N}\right)^v\right)^l + \frac{2}{s!\left(\frac{N-1}{N}\right)^{v\gamma}}\left(1 - \left(\frac{N-1}{N}\right)^v\right)^s \le$$

$$\le \sum_{l=0}^{s} \frac{\varepsilon_l}{l!}\left(\frac{N^v - (N-1)^v}{N^v}\right)^l + \frac{2}{s!}\left(\frac{N}{N-1}\right)^{v\gamma}\left(\frac{N^v - (N-1)^v}{N^v}\right)^s =$$

$$= \sum_{l=0}^{s} \frac{\varepsilon_l}{l!}\frac{((N-\Theta)^{v-1}v)^l}{N^{vl}} + \frac{2}{s!}\left(\frac{N}{N-1}\right)^{v\gamma}\left(\frac{(N-\Theta)^{v-1}v}{N^v}\right)^s \le$$

$$\le \sum_{l=0}^{s} \frac{\varepsilon_l v^l}{l!}\frac{1}{N^l} + \frac{2v^s}{s!}\frac{1}{N^s}\left(\frac{N}{N-1}\right)^{\gamma s/(s-\gamma)} \le \sum_{l=0}^{s} \frac{\varepsilon_l v^l}{l!}\frac{1}{N^l} + \frac{2^{1+\gamma s/(s-\gamma)}v^s}{s!N^s}.$$

Последнее неравенство в предыдущей цепочке неравенств справедливо при $N \geq 2$.

Полагая $\varepsilon_l = N^{-s+l}$, $l = 0, 1, \dots, s$, из предыдущего неравенства имеем:

$$|\Delta_N f| \leq \varepsilon_0 \left[\sum_{l=0}^{s} \frac{v^l}{l!} + \frac{2^{1+\gamma s/(s-\gamma)} v^s}{s!} \right].$$

Так как $s, v, \gamma-$ вполне определенные вещественные константы, то

$$\sum_{l=0}^{s} \frac{v^l}{l!} + \frac{2^{1+\gamma s/(s-\gamma)} v^s}{s!} = C_0,$$

где C_0- конечное число.

Таким образом,

$$|\Delta_N f(t)| \leq C_0 \varepsilon_0.$$

Исследуем точность вычисления производных $f^{(k)}(t)$, $k = 1, 2, \dots, s$, в сегменте Δ_N. Очевидно,

$$f^{(k)}(t) = f^{(k)}(0) + \frac{f^{(k+1)}(0)}{1!} t + \dots + \frac{f^{(s)}(0)}{(s-k)!} t^{s-k} + \frac{f^{(s)}(\Theta t) - f^{(s)}(0)}{(s-k)!} t^{s-k}.$$

Будем вычислять функцию $f^{(k)}(t)$ в сегменте Δ_N по формуле

$$\bar{f}^{(k)}(t) = \sum_{l=k}^{s} \frac{\bar{f}^{(l)}(0)}{(l-k)!} t^{l-k}.$$

Тогда погрешность восстановления функции $f(t)$ в сегменте Δ_N по последней формуле равна

$$|\Delta_N f^{(k)}(t)| = |f^{(k)}(t) - \bar{f}^{(k)}(t)| \leq \sum_{l=k}^{s} \frac{\varepsilon_l}{(l-k)!} h_N^{l-k} +$$

$$+2 \max_{t \in \Delta_N} |f^{(s)}(t)| \frac{h_N^{s-k}}{(s-k)!} \leq \sum_{l=k}^{s} \frac{\varepsilon_l}{(l-k)!} \left(\frac{N^v - (N-1)^v}{N^v} \right)^{l-k} +$$

$$+2 \frac{1}{\left(\frac{N-1}{N}\right)^{v\gamma}} \left(\frac{N^v - (N-1)^v}{N^v} \right)^{s-k} \frac{1}{(s-k)!} \leq$$

$$\leq \sum_{l=k}^{s} \frac{\varepsilon_l v^{l-k}}{(l-k)!} \frac{1}{N^{l-k}} + \frac{2^{1+v\gamma} v^{s-k}}{(s-k)!} \frac{1}{N^{s-k}} =$$

$$= \frac{1}{N^{s-k}} \left(\sum_{l=k}^{s} \frac{v^{l-k}}{(l-k)!} + \frac{2^{1+v\gamma} v^{s-k}}{(s-k)!} \right) = C_k \varepsilon_k,$$

где через C_k обозначено выражение в скобках.

Значения функции $f(t)$ в сегменте Δ_{N+l} можно определить по формуле Тейлора

$$f(t) = f(t_{N+l}) + \frac{f'(t_{N+l})}{1!}(t - t_{N+l}) + \cdots +$$

$$+\frac{f^{(s)}(t_{N+l})}{s!}(t - t_{N+l})^s + \frac{f^{(s)}(t_{N+l} + \Theta h_{N+l}) - f^{(s)}(t_{N+l})}{s!}(t - t_{N+l})^s. \tag{3.3}$$

Предполагая, что в точке t_{N+l} значения функции $f(t)$ и ее производных k-го порядка $f^{(k)}(t_{N+l})$ заданы с точностью ε_0^l и ε_k^l соответственно, будем вычислять значения $f(t)$ в сегменте Δ_{N+l} по формуле:

$$\bar{f}(t) = \bar{f}(t_{N+l}) + \frac{\bar{f}'(t_{N+l})}{1!}(t - t_{N+l}) + \cdots +$$

$$+\frac{\bar{f}^s(t_{N+l})}{s!}(t - t_{N+l})^s, \tag{3.4}$$

где $|f(t_{N+l}) - \bar{f}(t_{N+l})| \le \varepsilon_0^l$, $|f^{(k)}(t_{N+l}) - \bar{f}^{(k)}(t_{N+l})| \le \varepsilon_k^l$.

Оценим погрешность, которая возникает при вычислении функции $f(t)$ в сегменте Δ_{N+l} по предыдущей формуле.

Очевидно,

$$|\Delta_{N+l} f(t)| \le \sum_{k=0}^{s} \frac{\varepsilon_k^l}{k!} h_{N+l}^k +$$

$$+2\left(\frac{N}{N-l-1}\right)^{v\gamma} \frac{h_{N+l}^s}{s!} \le \sum_{k=0}^{s} \frac{\varepsilon_k^l}{k!} \left(\frac{(N-l)^v - (N-l-1)^v}{N^v}\right)^k +$$

$$+2\left(\frac{N}{N-l-1}\right)^{v\gamma} \left(\frac{(N-l)^v - (N-l-1)^v}{N^v}\right)^s \frac{1}{s!} \le$$

$$\le \sum_{k=0}^{s} \frac{\varepsilon_k^l}{k!} v^k \frac{(N-l-\Theta)^{(v-1)k}}{N^{vk}} + \frac{2}{s!} \frac{v^s}{N^s} \frac{(N-l-\Theta)^{(v-1)s}}{(N-l-1)^{v\gamma}} \le$$

$$\le \sum_{k=0}^{s} \frac{\varepsilon_k^l}{k!} \frac{1}{N^k} + \frac{2^{1+v\gamma}}{s!} \frac{v^s}{N^s} \le \frac{1}{N^s} \left[\sum_{k=0}^{s} \frac{v^k}{k!} + \frac{2^{1+v\gamma} v^s}{s!}\right] \le C_0^l \frac{1}{N^s}.$$

При получении этого неравенства полагаем $\varepsilon_0^l = \frac{1}{N^s}$, $\varepsilon_k^l = \frac{1}{N^{s-k}}$, $k = 1, 2, \ldots, s$.

Остановимся теперь на вопросе вычисления производных $f^{(k)}$ в сегменте Δ_{N+l}. Значение $f^{(k)}(t)$ в сегменте Δ_{N+l} равно

$$f^{(k)}(t) = \sum_{j=k}^{s} \frac{f^{(j)}(t_{N+l})}{(j-k)!}(t - t_{N+l})^{j-k} +$$

$$+ \frac{(f^{(s)}(t_{N+l} + \Theta h_l) - f^{(s)}(t_{N+l}))}{(s-k)!}(t - t_{N+l})^{s-k}.$$

Вычислять функцию $f^{(k)}(t)$ в сегменте Δ_{N+l} будем по формуле

$$\bar{f}^{(k)}(t) = \sum_{j=k}^{s} \frac{\bar{f}^{(j)}(t_{N+l})}{(j-k)!}(t - t_{N+l})^{j-k}. \qquad (3.5)$$

Оценим погрешность, которая возникает при использовании данной формулы. Очевидно,

$$|\Delta_{N+l}\bar{f}^{(k)}(t)| = |f^{(k)}(t) - \bar{f}^{(k)}(t)| \leq$$

$$\leq \sum_{j=k}^{s} \frac{\varepsilon_j^l}{(j-k)!} h_{N+l}^{j-k} + \frac{2}{s!}\left(\frac{N}{N-l-1}\right)^{v\gamma} h_{N+l}^{s-k} \leq$$

$$\leq \sum_{j=k}^{s} \frac{\varepsilon_j^l}{(j-k)!} v^j \frac{(N-l-\Theta)^{(v-1)(j-k)}}{N^{v(j-k)}} + \frac{2^{1+v\gamma}}{(s-k)!}\frac{v^s}{N^{s-k}} \leq C_k^l \frac{1}{N^{s-k}}.$$

Таким образом, при задании значений $f^{(k)}(t_{N+l})$ с точностью ε_k^l, значения $f^{(k)}(t_{N+l+1})$ вычисляются с точностью $C_k^l\varepsilon_k^l$, $k = 0, 1, \ldots, s$. Это утверждение справедливо при $l = N, N+1, \ldots, 2N-1$. Аналогичные оценки справедливы и для сегментов Δ_k, $k = 0, 1, \ldots, N-1$.

Пусть $C_* = \max\limits_{k,l} C_k^l$, где $k = 0, 1, \ldots, s$, $l = 1, \ldots, 2N-1$.

На сегменте $[t_{2N-1}, 1]$ функция $f(t)$ определяется формулой Тейлора

$$f(t) = \sum_{k=0}^{r} \frac{f^{(k)}(1)}{k!}(t-1)^k + \frac{f^{(r)}(1 - \Theta h_{2N-1}) - f^{(r)}(1)}{r!}(t-1)^r.$$

Значения $f(t)$ на сегменте Δ_{2N-1} будем вычислять по формуле

$$\bar{f}(t) = \sum_{k=0}^{r} \frac{\bar{f}^{(k)}(1)}{k!}(t-1)^k, \qquad (3.6)$$

где $|f^{(k)}(1) - \bar{f}^{(k)}(1)| \leq \varepsilon_k^{2N}$, $k = 0, 1, \ldots, l$.

Оценим возникающую при этом погрешность. Очевидно,

$$|\Delta_{2N-1}f(t)| = |f(t) - \bar{f}(t)| \le \sum_{k=0}^{r} \frac{\varepsilon_k^{2N}}{k!} h_{2N-1}^k + \frac{2}{r!} h_{2N-1}^r \le$$

$$\le \sum_{k=0}^{r} \frac{\varepsilon_k^{2N}}{k!} \left(\frac{1}{N}\right)^{vk} + \frac{2}{r!}\left(\frac{1}{N}\right)^{vr} \le \frac{1}{N^s}\left[\sum_{k=0}^{r} \frac{1}{k!} + \frac{2}{r!}\right] \le C_* \frac{1}{N^s}.$$

Здесь положено $\varepsilon_0^{2N} = \frac{1}{N^s}$, $\varepsilon_k^{2N} = \left(\frac{1}{N}\right)^{s-sk/(s-\gamma)}$, $k = 1, 2, \dots, r$.

На этом заканчивается описание процесса восстановления функции $f(t)$ на сегменте $[0,1]$.

Аналогичным образом, вычисляется функция $f(t)$ в сегментах $\Delta_{N-1}, \Delta_{N-2}, \dots, \Delta_0$.

Теперь, повторяя рассуждения, приведенные при построении ε-покрытия множества функций $F_{p,\omega,c}^{\Omega}$, множествами функций, принадлежащими $F_{p,\omega,c}^{\Omega}$ и имеющими диаметр 2ε, можно получить оценку
$H_\varepsilon(Q_{r\gamma}([-1,1],M)) \le A\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^{\frac{1}{s}}$.

Доказательство этого утверждения предоставляем читателю.

Определим с какой точностью нужно задать значения функции $f(t)$ и ее производных до s-го порядка в точке $t_N = 0$ для того, чтобы вычислить по формулам (3.4), (3.6) значение функции $f(t)$ с точностью $\varepsilon = \frac{1}{N^s}$ в сегментах $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_{2N-2}$. Очевидно, для этого достаточно выполнения неравенств $C_*^{N-2}\varepsilon_0^N = \varepsilon = \frac{1}{N^s}$, $C_*^{N-2}\varepsilon_k^N = \frac{1}{N^{s-k}} =$
$= \varepsilon N^k$, $k = 1, 2, \dots, s$. Следовательно, нужно положить $\varepsilon_0^N = \frac{\varepsilon}{C_*^{N-2}}$, $\varepsilon_k^N = \frac{\varepsilon N^k}{C_*^{N-2}}$, $k = 1, 2, \dots, s$. В узлах ± 1 нужно запомнить значения функции $f(t)$ с точностью $\varepsilon = \frac{1}{N^s}$, а ее производных k-го порядка с точностью $\varepsilon_k = \varepsilon N^{sk/(s-\gamma)}$, $k = 1, 2, \dots, r$.

Для того чтобы запомнить $s+1$ число с точностью $\frac{\varepsilon}{C_*^{N-2}}$, нужно $(s+1)m$ двоичных разрядов, где m определяется из неравенств $2^{-m} \le$
$\le \frac{\varepsilon}{C_*^{N-2}} < 2^{-m+1}$. Отсюда $m \asymp N + \log_2 \frac{1}{\varepsilon} \asymp \left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^{1/s}$.

Для запоминания $2(r+1)$ числа с точностью ε нужно $O\left(\log_2 \frac{1}{\varepsilon}\right)$ двоичных разрядов.

Таким образом, для восстановления функции $f(t)$ в сегменте $[-1,1]$ с точностью ε достаточно $m \asymp \left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^{1/s}$ двоичных разрядов.

Изложим другой способ исследования ε-энтропии класса функций $Q_{r,\gamma}(\Omega, M)$, позволяющий рассмотреть как случай когда параметр $\gamma-$ целое число, так и случай, когда параметр $\gamma-$ нецелое число.

Теорема 3.1. Пусть $\Omega = [-1,1]$, $1 \leq p \leq \infty$. Справедлива оценка

$$H_\varepsilon(Q_{r,\gamma,p}(\Omega, M)) \geq A\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^{1/s}.$$

Доказательство. Разобъем сегмент $[-1,1]$ на $n = 2N$ частей точками $t_k = -1+(k/N)^v, k = 0,1,\ldots,N, t_k = 1-((2N-k)/N)^v, k = = N+1,\ldots,2N, v = (s-1/p)(s-\gamma-1/p)$.

Обозначим через $\varphi(x)$ функцию непрерывно дифференцируемую до $(s-1)$-го порядка, имеющую кусочно-непрерывную производную s-го порядка, удовлетворяющую условию $\parallel \varphi^{(s)} \parallel_{L_p[-1,1]} = 1$. Введем функцию $\varphi_k(x)$, равную нулю всюду, кроме сегмента $\Delta_k = [t_k, t_{k+1}]$, а в сегменте Δ_k равную

$$\phi_k(x) = \left(\frac{h_k}{2}\right)^{s-1/p} \varphi\left(-1 + \frac{2(x-t_k)}{h_k}\right),$$

где $h_k = \mid t_{k+1} - t_k \mid$.

Через $\varphi_k^*(x)$ обозначим функцию

$$\varphi_k^*(x) = \begin{cases} \dfrac{\varphi_k(x)}{((k+1)/N)^{v\gamma}} & \text{при } x \in \Delta_k, k = 0,1,\ldots,N-1, \\ \dfrac{\varphi_k(x)}{((2N-k)/N)^{v\gamma}} & \text{при } x \in \Delta_k, k = N,\ldots,2N-1. \end{cases}$$

Нетрудно видеть,что $\varphi_k^*(x) \in Q_{r,\gamma,p}(\Omega, M)$. Оценим снизу величину

$$\varphi_k^*(x) \geq A\left(\left(\frac{k+1}{N}\right)^v - \left(\frac{k}{N}\right)^v\right)^{s-1/p}\left(\frac{N}{k}\right)^{v\gamma} \geq AN^{-s+1/p}.$$

Возьмем $N = [A/\varepsilon]^{1/s}$. Построим функции

$$\varphi^*_{\eta_0,\ldots,\eta_{2N-1}}(x) = \frac{1}{(2N)^{1/p}} \sum_{i=0}^{2N-1} \eta_i \varphi_i^*(x),$$

где $\eta_i = \pm 1, i = 0,1\ldots,2N-1$.

Расстояние между любыми двумя различными функциями $\varphi^*_{\eta_0\ldots,\eta_{2N-1}}(x)$ не меньше 2ε. Общее число 2ε-различимых функций

$\varphi^*_{n_0,\dots,n_{2N-1}}$ равно 2^{2N}. Следовательно,

$$H_\varepsilon(Q_{r,\gamma,p}(\Omega, M)) \geq \log_2 2^{2N} \geq A\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^{1/s}.$$

Теорема доказана.

Построим алгоритм, реализующий приведенную в теореме 3.1 оценку на классе $Q_{r,\gamma}(\Omega, M)$.

Теорема 3.2. Пусть $\Omega = [-1, 1]$. Справедлива оценка

$$H_\varepsilon(Q_{r,\gamma}(\Omega, M)) \leq A\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^{1/s}.$$

Доказательство. Пусть $\varphi(t) \in Q_{r,\gamma}(\Omega, M)$. Положим $\gamma_1 = \gamma$, если $\gamma-$ целое число, и $\gamma_1 = [\gamma] + 1$, если $\gamma-$ нецелое число.

Введем функцию $\psi(t) = (1 - t^2)^{\gamma_1}\varphi(t)$. Нетрудно видеть, что $\psi(t) \in$
$\in W^s(A), A = \text{const}$. Разобьем сегмент $[-1, 1]$ на более мелкие сегменты $\Delta_k = [t_k, t_{k+1}], \Delta^*_k = [\tau_{k+1}, \tau_k]$ точками $t_k = -1 + k^v/N, \tau_k =$
$= 1 - k^v/N, k = 0, 1, \dots, N_0, N_0 = [N^{r/s}], t_{N_0+1} = 0, \tau_{N_0+1} = 0, v =$
$= s/(s - \gamma_1)$.

В интервале $[t_k, t_{k+1}]$ (аналогично $[\tau_{k+1}, \tau_k]$) при $k \geq 1$ функцию $\psi(t)$ будем аппроксимировать отрезком ряда Тейлора $\psi_{s-1}(t, \Delta_k, t_k) =$
$= T_{s-1}(\psi, \Delta_k, t_k)$. Из полиномов $\psi_{s-1}(t, \Delta_k, t_k)$ составим сплайн $\psi_N(t)$, аппроксимирующий функцию $\psi(t)$ на сегменте $[t_1, \tau_1]$. Погрешность аппроксимации функции $\psi(t)$ на сегменте Δ_k при $k \geq 1$ (аналогично на сегменте Δ^*_k) равна

$$| \psi(t) - \psi_N(t) | \leq \frac{| \psi^{(s)}(t_k + \theta(t_{k+1} - t_k)) |}{s!}(t_{k+1} - t_k)^s \leq$$

$$\leq \frac{A}{s!}\left(\frac{(k+1)^v}{N} - \frac{k^v}{N}\right)^s \leq \frac{A}{s!}\frac{(k+1)^{(v-1)s}}{N^s}.$$

При γ целом функция $\varphi(t)$ аппроксимимируется на сегменте Δ_0 (аналогично на сегменте Δ^*_0) отрезком ряда Тейлора $\varphi_{r-1}(t, \Delta_0, t_0) =$
$= T_{r-1}(\varphi, \Delta_0, t_0)$. Погрешность этой аппроксимации не превосходит AN^{-r}.

В случае, когда $\gamma-$ нецелое число, функция $\varphi(t)$ аппроксимируется на сегменте Δ_0 (аналогично на сегменте Δ^*_0) отрезком ряда

Тейлора $\varphi_r(t, \Delta_0, t_1) = T_r(\varphi, \Delta_0, t_1)$. Погрешность этой аппроксимации оценивается неравенством

$$| \varphi(t) - \varphi_r(t, \Delta_0, t_1) | \leq A \left| \int\limits_{t_1}^{t} (t-\tau)^r \varphi^{(r+1)}(\tau) d\tau \right| \leq$$

$$\leq A h_0^r \int\limits_{t_1}^{t} | -1 - \tau |^{-\mu} \, d\tau \leq A h_0^{r+1-\mu} \leq A N^{-(r+1-\mu)} \leq A N^{-r},$$

где $\gamma = [\gamma] + \mu, 0 < \mu \leq 1$.

На сегментах Δ_k при $k \geq 1$ (аналогично на сегментах Δ_k^*) функция $\varphi(t)$ аппроксимируется сплайном с весовыми множителями $(1 -$
$-t^2)^{-\gamma_1} \psi_N(t)$. Погрешность этой аппроксимации на сегменте Δ_k при $k \geq 1$ оценивается величиной

$$| \varphi(t) - \varphi_N(t) | \leq (1 - t^2)^{-\gamma_1} \; | \psi(t) - \psi_N(t) | \leq$$

$$\leq A \frac{N^{\gamma_1}}{k^{v\gamma_1}} \frac{k^{(v-1)s}}{N^s} = \frac{A}{N^{(s-\gamma_1)}}.$$

Обозначим через $\varphi_N(t)$ сплайн, составленный из сплайна
$(1 - t^2)^{\gamma_1} \psi_N(t)$ и полиномов $\varphi_r(t, \Delta_0, t_1)$ и $\varphi_r(t, \Delta_{2N-1}, t_{2N-1})$.

Определим, следуя рассуждениям, приведенным в монографии [32], число двоичных разрядов, необходимых для восстановления функции $\psi(t)$ по сплайну $\psi_N(t)$ с точностью $Ak^{(v-1)s}/N^s$ при $t \in \Delta_k \; (\Delta_k^*), k \geq 1$.

Предположим, что уже найден способ задания двоичных разрядов для запоминания с точностью $Ak^{(v-1)(s-j)} N^{-(s-j)} (j = 0, 1 \ldots, s-1)$ значений функции $\psi^{(j)}(t)$ в узлах $t_k(\tau_k) (k = 0, 1, \ldots, ; k < N_0)$ и построен алгоритм, позволяющий на основании указанных разрядов восстанавливать значения чисел $\psi^{(j)}(t_{k+1}), \psi^{(j)}(\tau_{k+1}), j = 0, 1 \ldots, s-1$.

Значения $\psi^{(j)}(t_{k+1})$ (аналогично $\psi^{(j)}(\tau_{k+1})$) определяются по формуле

$$\psi^{(j)}(t_{k+1}) = \sum_{l=j}^{s-1} \frac{\psi^{(l)}(t_k)}{(l-j)!} (t_{k+1} - t_k)^{l-j}, \quad j = 0, 1, \ldots, s-1.$$

Оценим погрешность вычисления значений $\psi^{(j)}(t_{k+1})$, полагая, что значения $\psi^{(j)}(t_k)$ вычисляются с точностью $k^{(v-1)(s-j)}/N^{s-j}$.

Эта погрешность оценивается неравенством
$$\sum_{l=j}^{s-1}\frac{h_k^{l-j}k^{(v-l)(s-l)}}{N^{s-l}(l-j)!}+\frac{Ah_k^{s-j}}{(s-j)!}\le A\frac{(k+1)^{(v-1)(s-j)}}{N^{s-j}},$$
где $h_k=t_{k+1}-t_k$.

По вычисленным значениям $\psi^{(j)}(t_k)$ строится сплайн $\psi_N(t)$, причем погрешность аппроксимации функции $\psi(t)$ сплайном $\psi_N(t)$, использующим вычисленные значения $\psi^{(j)}(t_k)$, на сегменте Δ_k оценивается величиной $Ak^{(v-1)s}N^{-s}$. При этом, как отмечалось выше, погрешность аппроксимации функции $\varphi(t)$ сплайном $\varphi_N(t)$ на всем сегменте $[-1,1]$ не превосходит величины $AN^{-(s-\gamma_1)}=AN^{-r}$.

Таким образом, указан алгоритм построения таблицы. Оценим объем таблицы. Прежде всего отметим, что константы A, фигурирующие в оценке, легко вычисляются и не зависят от рассматриваемого сегмента.

Выше было показано, что если в точке t_k значения $\psi^{(j)}(t_k)$ были заданы с точностью $k^{(v-1)(s-j)}/N^{s-j}$, $j=0,1,\ldots,s$, то в точке t_{k+1} по предложенному выше алгоритму они вычисляются с точностью $A(k+$
$+1)^{(v-1)(s-j)}/N^{s-j}$. Следовательно, для задания в точке t_{k+1} значений $\psi^{(j)}(t_{k+1})$ с точностью $(k+1)^{(v-1)(s-j)}/N^{s-j}$. $j=0,1,\ldots,s$, необходимо дополнительно запомнить $[\log_2 A]+1$ двоичный разряд.

Для восстановления функции $\psi(t)$ на сегменте $[-1,1]$ по значению $\varphi^{(j)}(t_1)$ и $\varphi^{(j)}(\tau_1)$, $j=0,1,\ldots,s-1$, требуется дополнительно $2sN_0\log_2 A=2sN^{r/s}\log_2 A$ двоичных разрядов.

Тогда общее число разрядов, требуемых для восстановления функции $\varphi(t)$ на сегменте $[-1,1]$ с точностью AN^{-r}, равно $A(\log_2 N+N^{r/s})$.

Так как функции $\psi(t)=(1-t^2)^{\gamma_1}\varphi(t)$, $\varphi(t)\in Q_{r,\gamma}(\Omega,M)$ вместе со своими производными до s-го порядка ограничены по модулю константой M, то для задания в точке t_N значений $\psi^{(j)}(t_N)$ с точностью $N^{-(s-j)}$ требуется $\log_2(M(s+1)N^s)$ двоичных разрядов.

Следовательно, общее число двоичных разрядов, достаточных для восстановления произвольной функции $\varphi(t)\in Q_{r,\gamma}(\Omega,M)$ с точностью AN^{-r} равно $B(\log_2 N+N^{r/s})$.

Полагая $\varepsilon=N^{-r}$, имеем:
$$H_\varepsilon(Q_{r,\gamma}(\Omega,M))\le A\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^{1/s}.$$

Теорема доказана.

4. Энтропия класса функций $\mathbf{Q_{r,\gamma,p}([-1,1]^l, M)}$

В этом разделе продолжается исследование ε-энтропии класса функции $Q_{r,\gamma,p}(\Omega, M)$, $\Omega = [-1,1]^l$, $l = 2,3,\ldots$, в случае многих переменных.

Теорема 4.1. Пусть $\Omega = [-1,1]^l, l \geq 2, 1 \leq p \leq \infty$. Справедлива оценка

$$H_\varepsilon(Q_{r,\gamma,p}(\Omega, M)) \geq A \begin{cases} \varepsilon^{-(l-1)/(s-\gamma-1/p)} & \text{при } v > l/(l-1), \\ \varepsilon^{-l/s} & \text{при } v < l/(l-1), \\ \dfrac{|\ln\varepsilon|^{1-l/ps}}{\varepsilon^{l/s}} & \text{при } v = l/(l-1), \end{cases}$$

где $v = (s-l/p)/(s-\gamma-l/p)$.

Доказательство. Обозначим через $\Delta_k (k = 0,1,\ldots,N-1)$ множество точек $x = (x_1,\ldots,x_l)$ из Ω, расстояние $d(x,\Gamma)$ от которых до границы Γ области Ω удовлетворяет неравенствам

$$(k/N)^v \leq d(x,\Gamma) \leq ((k+1)/N)^v, \ v = (s-l/p)/(s-\gamma-l/p).$$

В каждой области Δ_k разместим кубы $\Delta^k_{i_1,\ldots,i_l}$, ребра которых равны $h_k = ((k+1)/N)^v - (k/N)^v, k = 0,1,\ldots,N-1$. Перенумеруем кубы $\Delta^k_{i_1,\ldots,i_l}$, размещенные в области Δ_k. Обозначим через $\varphi(x_1,\ldots,x_l)$ непрерывно дифференцируемую в R^l до $(s-1)$-го порядка функцию, финитную с носителем Ω и удовлетворяющую условию $\| \varphi^{(s)} \|_{L_p(\Omega)} =$
$= 1$. Введем функцию $\varphi^k_{i_1,\ldots,i_l}(x_1,\ldots,x_l)$, определенную в кубе $\Delta^k_{i_1,\ldots,i_l} = [a^k_{i_1}, a^k_{i_1+1};\ldots;a^k_{i_l}, a^k_{i_l+1}]$ формулой:

$$\left(\frac{h_k}{2}\right)^{s-1/p} \varphi\left(-1 + \frac{2(x_1 - a^k_{i_1})}{h_k}, \ldots, -1 + \frac{2(x_l - a^k_{i_l+1})}{h_k}\right).$$

Через $\varphi^{*k}_{i_1,\ldots,i_l}(x_1,\ldots,x_l)$ обозначим функцию

$$\varphi^{*k}_{i_1,\ldots,i_l}(x_1,\ldots,x_l) = \begin{cases} \frac{\varphi_{i_1,\ldots,i_l}(x_1,\ldots,x_l)}{((k+1)/N)^{v\gamma}} \quad \text{при} \quad (x_1,\ldots,x_l) \in \Delta^k_{i_1,\ldots,i_l}, \\ 0 \quad \text{при} \quad (x_1,\ldots,x_l) \in \Omega \setminus \Delta^k_{i_1,\ldots,i_l}. \end{cases}$$

Рассмотрим множество функций

$$u^k_{i_1,\ldots,i_l}(x_1,\ldots,x_l) = \frac{1}{n^{1/p}} \sum_k \sum_{i_1,\ldots,i_l} c_{k,i_1,\ldots,i_l} \varphi^{*k}_{i_1,\ldots,i_l}(x_1,\ldots,x_l),$$

где $c_{k,i_1,\ldots,i_l} = \pm 1$, $n-$ общее число кубов $\Delta^k_{i_1,\ldots,i_l}$, $k = 0, 1, \ldots, N-1$, покрывающих куб Ω.

Можно показать, что в любом кубе $\Delta^k_{i_1,\ldots,i_l}$

$$| \varphi^{*k}_{i_1,\ldots,i_l}(x_1, \ldots, x_l) | \geq An^{-1/p} N^{-(s-l/p)} =$$

$$= A \begin{cases} n^{-(s-\gamma-l/p)/(l-1)} & \text{при } v > l/(l-1), \\ n^{-s/l} & \text{при } v < l/(l-1), \\ \dfrac{| \ln n |^{s/l-1/p}}{n^{s/l}} & \text{при } v = l/(l-1). \end{cases}$$

Положим

$$\varepsilon = \begin{cases} n^{-(s-\gamma-l/p)/(l-1)} & \text{при } v > l/(l-1), \\ n^{-s/l} & \text{при } v < l/(l-1), \\ \dfrac{| \ln n |^{s/l-1/p}}{n^{s/l}} & \text{при } v = l/(l-1). \end{cases}$$

Расстояние между двумя различными функциями $u^k_{i_1,\ldots,i_l}$ не меньше 2ε, причем значения ε различны для каждой группы значений $v : v > l/(l-1), v = l/(l-1), v < l/(l-1)$. Определив для каждой группы значений v общее число 2ε-различимых функций $u^k_{i_1,\ldots,i_l}(x_1, \ldots, x_l)$ и повторяя рассуждения, приведенные в предыдущем разделе, завершаем доказательство теоремы.

Теорема 4.2. Пусть $\Omega = [-1, 1]^l$, $l \geq 2$. Справедлива оценка

$$H_\varepsilon(Q_{r,\gamma}(\Omega, M)) \leq A \begin{cases} \varepsilon^{-(l-1)/r} & \text{при } v > l/(l-1), \\ \varepsilon^{-l/s} \mid \ln \varepsilon \mid & \text{при } v = l/(l-1), \\ \varepsilon^{-l/s} & \text{при } v < l/(l-1), \end{cases}$$

где $v = s/r$.

Доказательство. Пусть $x = (x_1, \ldots, x_l)$, а $\varphi(x) \in Q_{r,\gamma}(\Omega, M)$. Введем функцию $\psi(x) = (d(x, \Gamma))^{\gamma_1} \varphi(x)$, где $\gamma_1 = \gamma$ при γ целом и $\gamma_1 = [\gamma] + 1$ при γ нецелом. Нетрудно видеть, что $\psi(x) \in C^s_l(\Omega)$.

Обозначим через $\Delta_k (k = 0, 1, \ldots, N_0 - 1), N_0 = [N^{r/s}]$, множество точек x из Ω, расстояние $d(x, \Gamma)$ от которых до границы Γ области Ω удовлетворяют неравенствам $k^v/N \leq d(x, \Gamma) \leq (k+1)^v/N, v = s/r$. Через Δ_0 обозначим множество точек x, удовлетворяющих неравенствам $0 \leq d(x, \Gamma) \leq (1/N)$, а через $\Delta_{N_0}-$ множество точек x, удовлетворяющих неравенствам $N_0^v/N \leq d(x, \Gamma) \leq 1$.

В каждой области Δ_k разместим кубы $\Delta^k_{i_1,\ldots,i_l}$, ребра которых равны $h_k = (k+1)^v/N - k^v/N, k = 0, 1, \ldots, N_0 - 1, h_{N_0} = 1 - N_0^v/N$.

Пусть $\Delta^k_{i_1,\ldots,i_l}=[a^k_{i_1},a^k_{i_1+1};\ldots,a^k_{i_l},a^k_{i_l+1}]$. В каждом кубе $\Delta^k_{i_1,\ldots,i_l}$, $k\geq 1$, функцию $\psi(x_1,\ldots,x_l)$ будем аппроксимировать отрезком ряда Тейлора

$$\psi_{s-1}(x,\Delta^k_{i_1,\ldots,i_l},a^k_{i_1,\ldots,a_l})=$$
$$=\psi(a^k_{i_1,\ldots,i_l})+\frac{d\psi(a^k_{i_1,\ldots,i_l})}{1!}+\ldots+\frac{d^{s-1}\psi(a^k_{i_1,\ldots,i_l})}{(s-1)!},$$

где $(a^k_{i_1,\ldots,i_l})=(a^k_{i_1},a^k_{i_2},\ldots,a^k_{i_l})$.

Из полиномов $\psi_{s-1}(x,\Delta^k_{i_1,\ldots,i_l},a^k_{i_1,\ldots,i_l})$ составим сплайн $\psi_N(x)$, аппроксимирующий функцию $\psi(x)$ в области $\Omega\setminus\Delta^0$.

Погрешность аппроксимации функции $\psi(x)$ сплайном $\psi_N(x)$ в области $\Delta^k_{i_1,\ldots,i_l}$ при $k\geq 1$ оценивается неравенством

$$\mid\psi(x)-\psi_{s-1}(x,\Delta^k_{i_1,\ldots,i_l},a^k_{i_1,\ldots,i_l})\mid\leq Ah^s_k\leq A\frac{k^{(v-1)s}}{N^s}.$$

При целом γ функция $\varphi(x)$ аппроксимируется в кубах $\Delta^0_{i_1,\ldots,i_l}$ отрезками ряда Тейлора $\varphi_{r-1}(x,\Delta^0_{i_1,\ldots,i_l},a^0_{i_1,\ldots,i_l})$. Погрешность этой аппроксимации не превосходит величины AN^{-r}.

В случае нецелого γ функция $\varphi(x)$ аппроксимируется в кубах $\Delta^0_{i_1,\ldots,i_l}$ отрезками ряда Тейлора $\varphi_r(x,\Delta^0_{i_1,\ldots,i_l},a^0_{i_1+1,\ldots,i_l+1})$. Для оценки погрешности этой аппроксимации воспользуемся интегральной формой остаточного члена формулы Тейлора.

В результате имеем

$$\mid\varphi(x)-\varphi_r(x,\Delta^0_{i_1,\ldots,i_l},a^0_{i_1+1,\ldots,i_l+1})\mid=$$
$$=\frac{1}{r!}\left|\int\limits_0^1(1-u)^r\sum_{j_1=1}^{1}\ldots\sum_{j_{r+1}=1}^{1}(x_{j_1}-b_{j_1})\ldots(x_{j_{r+1}}-b_{j_{r+1}})\times\right.$$
$$\left.\times\frac{\partial^{r+1}\varphi(a^0_{i_1+1,\ldots,i_l+1}+u(x-a^0_{i_1+1,\ldots,i_l+1}))}{\partial x_{j_1}\ldots\partial x_{j_{r+1}}}du\right|\leq$$
$$\leq\frac{h_0^{r+1}}{r!}\left|\int\limits_0^1(1-u)^r(d(a^0_{i_1+1,\ldots,i_l+1}+u(x-a^0_{i_1+1,\ldots,i_l+1}),\Gamma))^{-\mu}du\right|\leq$$
$$\leq Ah_0^{r+1-\mu}\leq AN^{-(r+1-\mu)},$$

где $\gamma=[\gamma]+\mu$, $0\leq\mu<1$, $b_{j_k}=a^0_{i_{j_k}+1}$.

В кубах $\Delta^k_{i_1,\ldots,i_l}$ при $1\leq k\leq N-1$ функция $\varphi(x)$ аппроксимируется сплайном с весовым множителем $(d(x,\Gamma))^{-\gamma_1}\psi_N(x)$. Из сплайна $(d(x,\Gamma))^{-\gamma_1}\psi_N(x)$ и полиномов $\varphi_{r-1}(x,\Delta^0_{i_1,\dots,i_l},a^0_{i_1,\dots,i_l})$ (или полиномов $\varphi_r(x,\Delta^0_{i_1,\dots,i_l},a^0_{i_1,\dots,i_l})$) составим локальный сплайн $\varphi_N(x)$. Погрешность аппроксимации в кубе $\Delta^k_{i_1,\dots,i_l}$ определяется неравенством

$$| \varphi(x)-\varphi_N(x) | \leq A\frac{k^{(v-1)s}}{N^s}\left(\frac{N}{k^v}\right)^{\gamma_1} = A\frac{1}{N^{s-\gamma_1}}.$$

Определим, число двоичных разрядов, необходимых для восстановления функции $\psi(x)$ по сплайну $\psi_N(x)$ с точностью $Ak^{(v-1)s}N^{-s}$ в кубе $\Delta^k_{i_1,\dots,i_l}$ при $k\geq 1$.

Для определения значения $\varphi^{(j_1,\dots,j_l)}(a^0_{i_1+1,\dots,i_l+1}), j=| j_1 | + \ldots + | j_l |$, где $j=0,1,\dots,r-1$ при γ целом и $j=0,1,\dots,r$ при γ нецелом, с точностью N^{-r+j}, требуется $\log_2(C_j n_0 M N^{r-j}) = A(\log_2 n_0 + \log_2 N)$ двоичных разрядов, где n_0- число кубов $\Delta^0_{i_1,\dots,\imath_l}$, расположенных в Δ^0; C_j- число частных производных $\varphi^{(j_1,\dots,j_l)}(x) = \partial^{|j|}\varphi/\partial x_1^{j_1}\dots\partial x_l^{j_l}$ j-го порядка. Нетрудно видеть, что если производные j-го порядка от функции $\varphi(x)$ в точке $a^0_{i_1+1,\dots,i_l+1}$ определяются с точностью N^{-r+j}, то точность восстановления функции φ в $\Delta^0_{i_1,\dots,i_l}$ не меньше AN^{-r}.

Для вычисления значений $\psi^{(j_1,\dots,j_l)}(a^1_{i_1+1,\dots,i_l+1}), j=|j_1|+\ldots+|j_l|$, $j=0,1,\dots,s-1$, с точностью $k^{(v-1)(s-j)}N^{-s+j}$ требуется $\log_2(C_j n_0 M N^{s-j}) = B(\log_2 n_1 + \log_2 N)$ двоичных разрядов, где n_1- число кубов $\Delta^1_{i_1,\dots,i_l}$ в области Δ^1.

Предположим, что уже указаны способ задания двоичных разрядов для запоминания с точностью $k^{(v-1)(s-j)}N^{-s+j}(j=0,1,\dots,s-1)$ значений функции $\psi^{(j_1,\dots,j_l)}(a^k_{i_1,\dots,i_l})$ и правило, позволяющее на основании указанных разрядов восстанавливать значения чисел $\psi^{(j_1,\dots,j_l)}(a^{k+1}_{i_1,\dots,i_l})$. Опишем дальнейший процесс построения таблицы. Для простоты обозначений ограничимся случаем $l=2$. Пусть требуется вычислить значения $\psi^{(j_1,j_2)}(a^{k+1}_{i_1,,i_2})$, где $(a^{k+1}_{i_1,i_2}) = (a^{k+1}_{i_1}, a^{k+1}_{i_2})$. Введем точку $a^{*k}_{i_1,i_2}$ (рис. 2) с координатами $(b^k_{i_1}, a^k_{i_2})$, где $b^k_{i_1} = a^k_{i_1+1}$.

Вычислим значения $\psi^{(j_1,l_2)}(a^{*k}_{i_1,i_2})$ по формуле

$$\psi^{(j_1,l_2)}(b^k_{i_1}, a^k_{i_2}) = \sum_{l_1=j_1}^{s-l_2-1} \frac{\psi^{(l_1,l_2)}(a^k_{i_1}, a^k_{i_2})}{(l_1-j_1)!}(b^k_{i_1} - a^k_{i_1})^{l_1-j_1},$$

$l_2 = j_2, \ldots, s - j_1 - 1$, а затем $\psi^{(j_1,j_2)}(a^{k+1}_{i_1,i_2})$ по формуле

$$\psi^{(j_1,j_2)}(a^{k+1}_{i_1,i_2}) = \sum_{l_2=j_2}^{s-l-j_1} \frac{\psi^{(j_1,l_2)}(b^k_{i_1}, a^k_{i_2})}{(l_2-j_2)!}(a^{k+1}_{i_2} - a^k_{i_2})^{l_2-j_2}.$$

Оценим погрешность этих вычислений. Погрешность вычисления $\psi^{(j_1,j_2)}(b^k_{i_1}, a^k_{i_2})$ оценивается неравенством

$$A\left(\sum_{l_1=j_1}^{s-l_2-1} \frac{k^{(v-1)(s-l_1-l_2)}k^{(v-1)(l_1-j_1)}}{N^{s-l_1-l_2}N^{l_1-j_1}} + \frac{k^{(v-1)(s-l_2-j_1)}}{N^{s-j_1-l_2}}\right) \le$$

$$\le A\frac{k^{(v-1)(s-l_2-j_1)}}{N^{s-l_2-j_1}}.$$

Погрешность вычисления $\psi^{(j_1,j_2)}(a^{k+1}_{i_1,i_2})$ оценивается неравенством

$$A\left(\sum_{l_2=j_2}^{s-l-j_1} \frac{k^{(v-1)(s-j_1-l_2)}k^{(v-1)(l_2-j_2)}}{N^{s-j_1-l_2}N^{l_2-j_2}} + \frac{k^{(v-1)(s-j_1-j_2)}}{N^{s-j_1-j_2}}\right) \le$$

$$\le Ak^{(v-1)(s-j_1-j_2)}N^{-(s-j_1-j_2)}.$$

Отметим, что константы A, фигурирующие в оценках, не зависят от рассматриваемого куба $\Delta^k_{i_1,i_2}$. Таким образом, для построения таблицы, предназначенной для вычисления функции $\varphi(x)$ с точностью N^{-r}, нужно в каждой точке $a^k_{i_1,i_2}$ дополнительно запомнить $C_s \log_2 A$ двоичных разрядов, где C_s- число частных производных до $(s-1)$-го порядка включительно. Следовательно, всего нужно запомнить $C_s n \log_2 A$ двоичных разрядов, где $n-$ число кубов $\Delta^k_{i_1,i_2}$, покрывающих область Ω.

Эта же оценка имеет место и в l-мерном случае с той лишь разницей, что теперь $n-$ число кубов $\Delta^k_{i_1,i_2}$, покрывающих куб Ω.

Число двоичных разрядов, необходимых для того, чтобы запомнить значение функции $\psi(x)$ и всех ее частных производных $\partial^{|j|}\psi(x_1, \ldots, x_l)/\partial x_1^{j_1} \cdots \partial x_l^{j_l}$ в точке $a^1_{1,\ldots,l}$ с точностью $N^{-s+|j|}$ не превосходит $[\log_2(C_s M N^s)]+1$, где C_s- число всех частных производных до s-го порядка, включая и производную нулевого порядка.

Оценим величину n, полагая, что $n \geq 2$. По аналогии с выводом соотношения (3.1) в разделе 3 главы 2 имеем

$$m \sum_{k=0}^{N_0-1} \left[\frac{2-(k+1)^v N^{-1} - k^v N^{-1}}{h_k} \right]^{l-1} \leq n \leq$$

$$\leq m \sum_{k=0}^{N_0-1} \left(\left(\frac{2-(k+1)^v N^{-1} - k^v N^{-1}}{h_k} \right) + 1 \right)^{l-1},$$

где $h_k = ((k+1)^v - k^v)N^{-1}$, $m-$ число граней куба Ω.

Оценим сумму

$$\sum_{k=0}^{N_0-1} \left(\frac{2N-(k+1)^v - k^v}{(k+1)^v - k^v} \right)^{l-1} \leq (2N)^{l-1} + \left(\frac{2}{v}\right)^{l-1} \sum_{k=1}^{N_0-1} \left(\frac{N-k^v}{k^{v-1}} \right)^{l-1} \leq$$

$$\leq (2N)^{l-1} + \left(\frac{2}{v}\right)^{l-1} \sum_{k=1}^{N_0-1} \left(\left(\frac{N}{k^{v-1}} \right)^{l-1} + C_{l-1}^1 \left(\frac{N}{k^{v-1}} \right)^{l-2} k + \right.$$

$$\left. + C_{l-1}^2 \left(\frac{N}{k^{v-1}} \right)^{l-2} k^2 + \ldots + (-1)^{l-1} k^{l-1} \right) \leq$$

$$\leq B \begin{cases} N^{(s-\gamma_1)l/s} & \text{при } v < l/(l-1), \\ N^{l-1} & \text{при } v > l/(l-1), \\ N^{l-1} \ln N & \text{при } v = l/(l-1). \end{cases} \qquad (4.1)$$

Очевидно, для величины n справедлива оценка (4.1).

Полагая $\varepsilon = N^{-r}$ и используя полученную выше оценку n, завершаем доказательство теоремы.

Из теорем 4.1 и 4.2 вытекает следующее утверждение.

Теорема 4.3. Пусть $\Omega = [-1, 1]^l, l \geq 2, \gamma-$ целое число. Справедлива оценка

$$H_\varepsilon(Q_{r,\gamma}(\Omega)) \asymp \begin{cases} \varepsilon^{-(l-1)/r} & \text{при } v > l/(l-1), \\ \varepsilon^{-l/s} \mid \ln \varepsilon \mid & \text{при } v > l/(l-1), \\ \varepsilon^{-l/s} & \text{при } v < l/(l-1), \end{cases}$$

где $v = s/r$.

Глава 4

ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ СУПЕРПОЗИЦИЯМИ ФУНКЦИЙ МЕНЬШЕГО ЧИСЛА ПЕРЕМЕННЫХ

1. Введение

На II Международном конгрессе математиков, проходившем с 6 по 12 августа 1900 г., Д. Гильбертом был произнесен знаменитый доклад «Математические проблемы» [72], который во многом определил развитие математики в XX в. В докладе Д. Гильберта были сформулированы 23 проблемы, касающиеся всех областей математики: теории множеств (континиум-проблема), обоснования математики, геометрии, алгебры, алгебраической геометрии, теории чисел, математического анализа, дифференциальных уравнений и вариационного исчисления.

Среди сформулированных 23-х проблем 13-я проблема звучала так: доказать, что уравнение 7-й степени

$$f^7 + xf^3 + yf^2 + zf + 1 = 0 \tag{1.1}$$

не разрешимо с помощью каких-либо непрерывных функций, зависящих только от двух аргументов.

Отметим, что в уравнении (1.1) аргументы x, y, z могут принимать любые действительные значения.

При постановке 13-й проблемы было выбрано уравнение 7-й степени вида (1.1), так как с помощью преобразования Чирнгаузена (1683) общее алгебраическое уравнение n-й степени приводится к виду

$$f^n + a_4 f^{n-4} + \cdots + a_{n-1} f + 1 = 0.$$

Формулируя проблему, Д. Гильберт предполагал, что функция $f(x, y, z)$, являющаяся решением уравнения (1.1), не представима в виде суперпозиций даже непрерывных функций. Основанием для этого предположения было утверждение о том, что он располагает строгим доказательством невозможности представления аналитических функций трех переменных суперпозициями функций только двух переменных (во всех комментариях к 13-й проблеме отмечается, что, по-видимому, Д. Гильберт имел в виду аналитические функции двух переменных). Поэтому сенсационной была работа А. Н. Колмогорова [44], в которой он доказал, что всякая непрерывная функция n переменных представима в виде суперпозиции непрерывных функций трех переменных.

В следующем, 1957 г. В. И. Арнольд, будучи студентом 3-го курса МГУ, доказал [4], что всякая непрерывная функция трех переменных представима в виде суперпозиций непрерывных функций двух переменных:

$$f(x, y, z) = \sum_{i=0}^{9} f_i(\varphi_i(x, y), z), \tag{1.2}$$

где все функции непрерывны. В том же 1957 г. А. Н. Колмогоров показал [45], что всякая непрерывная функция двух переменных представима суперпозициями непрерывных функций одной переменной и операцией сложения. Таким образом, А. Н. Колмогоров и В. И. Арнольд доказали несправедливость гипотезы Гильберта о том, что решение уравнения 7-й степени не представимо суперпозициями непрерывных функций двух переменных.

В это же время А. Н. Колмогоров отметил [46], что, по-видимому, Д. Гильберт был бы прав, если бы рассматривал представление аналитических функций многих переменных непрерывно дифференцируемыми функциями меньшего числа переменных. Это замечание
А. Н. Колмогорова известно как проблема Колмогорова: «существуют аналитические функции трех переменных, не представимые суперпозициями непрерывно дифференцируемых функций двух переменных, и аналитические функции двух переменных, не представимые суперпозициями непрерывно дифференцируемых функций одной переменной и сложения».

В случае аналитических функций многих комплексных переменных проблема Колмогорова решена в [22], [26], а в случае аналитических функций четного числа действительных переменных в [27].

Напомним, следуя статьям [85, 86], определение суперпозиции функций. При этом ограничимся функциями $f(x, y, z)$ трех переменных, определенных в единичном кубе $0 \le x, y, z \le 1$.

Суперпозиция определяется по индукции. Суперпозициями нулевого ранга называются просто функции двух переменных.

Суперпозициями первого ранга называются функции, представимые в виде $\varphi(u_1(x, y),\, u_2(y, z))$ или $\varphi(u_1(x, z), u_2(x, y))$ и т. д., т. е. функции функций двух переменных от суперпозиций нулевого ранга. При этом функции $u_1(x, y)$, $u_2(y, z))$ и т. д. определены в единичном квадрате $D = [0, 1]^2$, и областью их значений является сегмент $[0, 1]$. Говорят, что $f(x, y, z)$ есть суперпозиция ранга k, если $f(x, y, z) = \varphi(u_1(x, y, z), u_2(x, y, z))$, где $u_1(x, y, z)$, $u_2(x, y, z)$– суперпозиции, имеющие ранг $\le k - 1$ и, по крайней мере, одна из них имеет ранг $k - 1$.

Суперпозиция любого ранга, порожденная функциями одной переменной, есть функция одной переменной. Поэтому в этом случае принято рассматривать суперпозиции функций одной переменной и операции сложения. Следовательно, суперпозициями нулевого ранга являются функции одной переменной $u_1(x)$ и $v_1(y)$. Суперпозиции первого ранга – это функции $\varphi(u_1(x) + v_1(y))$. Функция $f(x, y)$ является суперпозицией ранга k, если $f(x, y) = \varphi(u_{k-1}(x, y) + v_{k-1}(x, y))$, где $u_{k-1}(x, y), v_{k-1}(x, y)$– суперпозиции, имеющие ранг $\leq k-1$ и, по крайней мере, одна из них имеет ранг $k-1$. Еще раз отметим, что все функции $u_k(x)$ и $v_k(y), k = 1, 2, \ldots$ определены в единичном квадрате и значения всех этих функций удовлетворяют неравенствам $0 \leq u_k(x), v_k(y) \leq 1, k = 1, 2, \ldots$.

Проблеме представления функций многих переменных конечными суперпозициями функций меньшего числа переменных посвящено много работ.

Д. Гильберт писал (цитируется по [33], с. 79), что он «располагает строгим доказательством того, что существует аналитическая функция трех переменных, которая не может быть получена конечной суперпозицией функций только двух аргументов». Как отмечают

А. Г. Витушкин и Г. М. Хенкин [33], Д. Гильберт, по-видимому, имел в виду аналитические функции двух переменных.

А. Островский доказал [100], что аналитическая функция двух переменных $\xi(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^y}$ не является конечной суперпозицией бесконечно дифференцируемых функций одной переменной и алгебраических функций любого числа переменных.

В 1956 г. А. Н. Колмогоров показал, что любая непрерывная функция n переменных может быть представлена суперпозициями непрерывных функций трех переменных.

В. И. Арнольд установил, что любая непрерывная функция $f(x, y, z)$ трех переменных может быть представлена суперпозициями (1.2), где все функции непрерывны.

Таким образом, А. Н. Колмогоров и В. И. Арнольд доказали несправедливость гипотезы Д. Гильберта. Позднее совместными усилиями А. Н. Колмогорова и В. И. Арнольда для любой непрерывной функции n переменных было получено представление

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{2n+1} \varphi_i(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(x_j)), \tag{1.3}$$

где все функции непрерывны, а внутренние функции $a_{ij}(x_j)$ заранее фиксированы.

Позднее выражение (1.3) было упрощено рядом авторов. В 1962 г.

G. G. Lorentz [98] показал, что в (1.3) функции φ_i ($i = 1, 2, \dots, 2n+1$) могут быть заменены одной функцией φ, а в 1964 г. D. A. Sprecher [102] установил, что функции α_{ij} могут быть представлены в виде $\lambda_i\psi_j$, где λ_i- константы, $i = 1, 2, \dots, 2n+1$, $j = 1, 2, \dots, n$.

Таким образом, выражение (1.3) можно представить в виде

$$f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^{2n+1} \varphi\left(\sum_{j=1}^{n} \lambda_i \psi_j(x_j)\right). \tag{1.4}$$

Были проведены исследования, посвященные выяснению гладкости функций φ_i, α_{ij}, φ, ψ_j в выражениях (1.3) и (1.4).

А. Г. Витушкин и Г. М. Хенкин доказали [33], что для любых непрерывных функций $p_i(x, y)$ и непрерывно дифференцируемых функций $q_i(x, y)$ существует аналитическая функция двух переменных, которая не представима в виде суперпозиций $\sum_{i=1}^{N} p_i(x, y)\varphi_i(q_i(x, y))$, где $N-$ целое; $\varphi_i(t)-$ произвольные непрерывные функции одной переменной. Б. Л. Фридман показал [91], что существуют аналитические функции трех переменных, не представимые в виде суперпозиций:

$$\sum_{i=1}^{n} \xi_i(\varPhi_{1i}(x), \varPhi_{2i}(x)),$$

где $x = (x_1, x_2, x_3)$; $\varPhi_{1i}$, $\varPhi_{2i}-$ фиксированные дважды непрерывно дифференцируемые функции трех переменных; $\xi_i(u_1, u_2)-$ произвольно непрерывные функции двух переменных.

2. Существование аналитических функций многих комплексных переменных, не представимых в виде суперпозиций непрерывно дифференцируемых функций меньшего числа комплексных переменных

В 1954 г. А. Г. Витушкин доказал утверждение, связывающее возможность представления функций многих переменных суперпозициями функций меньшего числа переменных с гладкостью функций.

Теорема 2.1 (А. Г. Витушкин). Существуют функции n переменных, имеющие s непрерывных производных, не представимые в виде суперпозиций функций m переменных, имеющих r непрерывных производных, если $\frac{n}{s} > \frac{m}{r}$.

Как отмечено в [85], число n/s В. И. Арнольд назвал качеством функции.

Доказательство теоремы А. Г. Витушкина приведем, следуя статье [85]. Для простоты обозначений ограничимся случаем, когда
$n = 3$, $m = 2$.

Пусть функции трех переменных принадлежат классу $W_s^n(1,1)$, а функции двух переменных – классу $W_r^m(1,C)$. Класс $W_s^n(1,C)$ является частным случаем класса $F_{s,L,c}^{\rho,n}$, введенного в разделе 2 предыдущей главы и определяется следующим образом [85]. Под классом функций $W_s^n(\Delta, C)$ n переменных понимается множество функций $f(x_1,\dots,x_n)$, заданных по n-мерном кубе $E^n(\Delta)$ с ребром $\Delta:$
$0 \le x_i \le \Delta$, все частные производные которых порядка s непрерывны и ограничены одной константой $C:$

$$\left|\frac{\partial^s f(x_1,\dots,x_n)}{\partial x_1^{s_1}\cdots\partial x_n^{s_n}}\right| \le C, \quad s_1+s_2+\cdots+s_n = s,$$

и, кроме того,

$$|f(x_1,\dots,x_l)| \le C.$$

В предыдущей главе была приведена формула Колмогорова – Витушкина, согласно которой

$$H_\varepsilon(W_s^n(\Delta,C)) \asymp \left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^{\frac{n}{s}}.$$

Суперпозиции определяются по индукции. Суперпозициями нулевого ранга являются функции двух переменных. Очевидно, существуют функции трех переменных, не представимые функциями двух переменных.

Суперпозициями первого ранга являются функции вида
$\varphi(u_1(x,y),u_2(x,z)), \varphi(u_1(x,y),u_2(y,z)), \varphi(u_1(x,z),u_2(y,z))$ и т.д., т.е. функции двух переменных от суперпозиций нулевого ранга.

При построении суперпозиций предполагается, что все функции трех переменных определены в кубе $[0,1]^3$, а все функции двух переменных определены в квадрате $[0,1]^2$ и областью их значений является сегмент $[0,1]$.

Покажем, что суперпозициями первого ранга вида

$$\varphi(u_1(x,y),u_2(y,z)) \tag{2.1}$$

и подобными, где функции φ, u_1, u_2 принадлежат классу $W_r^2(1,C)$, $C-$ произвольная константа, $0 < C < \infty$, не исчерпываются все функции $f(x,y,z) \in W_r^3(1,C)$ при условии, что $3/s > 2/r$.

Обозначим через $S_1(C)$ множество функций вида (2.1), где φ, u_1, u_2 принадлежат классу $W_r^2(1, C)$ с фиксированной постоянной C.

Функции из класса $W_r^2(1, C)$ удовлетворяют условию Липпица с константой $C' \leq 2C$.

Нетрудно видеть, что если функции φ, u_1, u_2 аппроксимируются в квадрате $[0,1]^2$ с точностью ε функциями $\tilde{\varphi}, \tilde{u}_1, \tilde{u}_2$ соответственно, то функция $\psi(x, y, z) = \varphi(u_1(x, y), u_2(y, z))$ аппроксимируется функцией $\tilde{\psi}(x, y, z)$ с точностью $\gamma\varepsilon$, где $\gamma-$ константа, не зависящая от конкретного вида функций φ, u_1, u_2 и $\tilde{\varphi}, \tilde{u}_1, \tilde{u}_2$.

В самом деле,

$$|\tilde{\psi}(x, y, z) - \psi(x, y, z)| \leq |\tilde{\varphi}(\tilde{u}_1, \tilde{u}_2) - \varphi(\tilde{u}_1, \tilde{u}_2)| +$$
$$+ |\varphi(\tilde{u}_1, \tilde{u}_2) - \varphi(u_1, u_2)| \leq \varepsilon + 2C\varepsilon = \gamma\varepsilon.$$

Применяя формулу Колмогорова – Витушкина, имеем:

$$H_{\gamma\varepsilon}(S_1(C)) \leq \alpha(C) \left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^{2/r}.$$

С другой стороны, из этой же формулы следует, что

$$H_{\gamma\varepsilon}(W_s^3(1, 1)) \geq \beta \left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^{3/s}, \quad \beta = \mathrm{const}.$$

При $3/s > 2/r$ очевидно что существует такое малое ε при котором

$$\beta \left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^{3/s} >> \alpha(r) \left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^{2/r}.$$

Следовательно, ни при каком постоянном C множество $S_1(C)$ нигде не плотно в $W_s^3(1.1)$.

Напомним определение нигде не плотного множества. Пусть $X-$ банахово пространство. Множество $E \subset X$ называется плотным в множестве $X_0 \subset X$, если X_0 входит в замыкание $\bar{E}$ множества E ($X_0 \subset \bar{E}$). Если $\bar{E} = X$, то E называется всюду плотным в X. Множество $E \subset X$ называется нигде не плотным, если $X \backslash \bar{E}$ всюду плотно. Другими словами, E называется нигде не плотным в пространстве X, если каждый шар этого пространства содержит в себе некоторый шар, свободный от точек множества E.

Введем в пространстве F_s^3 s раз дифференцируемых функций норму

$$\|f\|_s = \max_{x \in [0,1]^3} \left(|f(x)| + \sum_{j=1}^{3} \left| \frac{\partial f}{\partial x_j} \right| + \cdots + \right.$$

$$+\sum_{j_1+j_2+j_3=s}\left|\frac{\partial^s f}{\partial x_1^{j_1}\partial x_2^{j_2}\partial x_3^{j_3}}\right|\right).$$

Известно [85], что пространство F_s^3- банахово.

Так как множество $S_1(C)$ при любой константе C является множеством нигде не плотным в $W_s^3(1.1)$ и, следовательно, в F_s^3, то объединение счетного множества $S_1 = S_1(1)\cup S_1(2)\cup\cdots\cup S_1(n)\cup\cdots$ нигде не плотных множеств является нигде не плотным множеством. Следовательно, дополнение к S_1 в F_s^3 есть всюду плотное множество.

Суперпозициями второго ранга являются функции вида $\varphi(u_1(x,y), u_2(y,z))$, в которых по крайней мере одна из функций $u_1(x,y)$, $u_2(y,z)$ является суперпозицией первого ранга.

Каждую суперпозицию второго ранга

$$\psi(\varphi_1(u_1(x,y), u_2(y,z)), \varphi_2(u_1(x,y), u_3(x,z))) \tag{2.2}$$

можно рассматривать как суперпозицию первого порядка функций $\varphi_1(u_1, u_2)$, $\varphi_2(u_1, u_3)$ переменных u_1, u_2, u_3, $0 \le u_j \le 1$, $j = 1, 2, 3$. Если функции $\psi, u_1, u_2, \varphi_1, \varphi_2$ вычисляются с точностью ε, то функции $\varphi_1(u_1(x,y), u_2(y,z))$, $\varphi_2(u_1(x,y), u_3(x,z))-$ с точностью $\gamma\varepsilon$, а функции вида (2.2) $-$ с точностью $\gamma^2\varepsilon$.

Из формулы Колмогорова $-$ Витушкина следует, что для данной суперпозиции, $S_{2,\psi}(C)$, описываемой формулой (2.2),

$$H_{\gamma^2\varepsilon}(S_1(C)) \le \alpha_2(C) \left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^{2/r}.$$

Так как число всевозможных различных суперпозиций второго ранга конечно, то справедливо неравенство

$$H_{\gamma^2\varepsilon}(S_2(C)) \le \alpha_2^*(C) \left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^{2/r},$$

где $S_2(C)-$ множество всевозможных суперпозиций второго ранга, составленных из функций, принадлежащих классу $W_r^2(1, C)$.

Обозначим через S_2 множество $S_2 = S_2(1) \cup S_2(2) \cup \cdots \cup S_2(n) \cup \cdots$ и, повторяя приведенные выше рассуждения, убеждаемся, что S_2 нигде не плотно в F_s^3.

Аналогично доказывается, что при любом конечном k суперпозиции ранга k (S_k) нигде не плотно в F_s^3.

Так как при любом конечном k множество различных суперпозиций ранга k конечно, то множество всевозможных суперпозиций

$$S = S_1 \cup S_2 \cup \cdots S_n \cup \cdots,$$

как объединение счетного множества нигде не плотных множеств, является множеством нигде не плотным в F_s^3.

Теорема доказана.

Прежде чем приступить к доказательству справедливости гипотезы Колмогорова, оценим ε-энтропию класса функций $K_r^2(D^2, C)$, состоящего из функций двух комплексных переменных вида $f(z_1, z_2)$, определенных в области $D^2 = D_1 \times D_1$ $(D_j = \{z_j : |z_j| \le 1\}, j = 1, 2)$ и имеющих частные производные до r порядка включительно по переменным x_j и y_j, $z_j = x_j + iy_j$, $|x_j^2| + |y_j|^2 \le 1$, $1, 2,$

причем как все частные производные, так и сами функции ограничены по модулю константой C.

Для наших целей достаточно ограничиться оценкой сверху, т. к. только она будет использована в дальнейших рассуждениях.

Рассмотрим плоскость Z_j комплексной переменной $z_j = x_j + iy_j$, $j = 1, 2$. В плоскости Z_j введем декартову систему координат $0x_jy_j$, совместив оси x_j и y_j декартовой системы координат с действительной и мнимой осями плоскости Z_j, $j = 1, 2$. Мы вводим одинаковые символы для координат в действительной и комплексной плоскостях, так как из контекста будет ясно к какому пространству относятся рассуждения.

В прямоугольной декартовой системе координат $0x_1y_1$ построим квадрат $\Delta^1 == [-1, 1; -1, 1]$, который затем покроем более мелкими квадратами $\Delta^1_{kl} = [t_k, t_{k+1}; t_l, t_{l+1}]$, $k, l = 0, 1, \dots, 2N-1$, $t_k = -1+k/N$, $k = 0, 1, \dots, 2N$. Квадраты Δ^1_{kl}, $k, l = 0, 1, \dots, 2N-1$, имеющие непустое пересечение с кругом $x_1^2+y_1^2 \le 1$, обозначим через $\bar{\Delta}^1_{kl}$ и назовем отмеченными. Аналогичным образом строятся квадраты Δ^2_{kl}, $k, l = 0, 1, \dots, 2N-1$.

Возвратимся теперь к комплексным переменным и рассмотрим функцию $f(z_1, z_2)$, где $z_1 \in \bar{\Delta}^1_{k_1l_1}$, $z_2 \in \bar{\Delta}^2_{k_2l_2}$.

Функцию $f(z_1, z_2)$ можно представить в виде

$$f(z_1, z_2) = u(x_1, y_1, x_2, y_2) + iv(x_1, y_1, x_2, y_2),$$

где $(x_1, y_1, x_2, y_2) \in \bar{\Delta}^{1,2}_{k_1l_1k_2l_2} = \bar{\Delta}^1_{k_1l_1} \times \bar{\Delta}^2_{k_2l_2}$.

Пусть значение функции $u(x_1, y_1, x_2, y_2)$ и ее частных производных p-го порядка вычислены в точке $t_{k_1}, t_{l_1}; t_{k_2}, t_{l_2}$ с точностью до ε и ε_p соответственно. Повторяя рассуждения, проведенные в главе 3, можно показать, что формула (2.10) из раздела 2 главы 3 позволяет восстанавливать значения функции $f(z_1, z_2)$ и ее частных производных p-го порядка, $1 \le p \le r$, с точностью $C_*\varepsilon$ и $C_*\varepsilon_p$ соответственно. Из этих рассуждения, учитывая, что число областей $\bar{\Delta}^{12}_{k_1l_1k_2l_2}$, $k_i, l_i = 0, 1, \dots, 2N-1$, есть величина $O(N^4)$, следует:

$$H_\varepsilon(K^2_r(D^2, C)) \le \alpha(C) \left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^{4/r}.$$

Переформулируем проблему Колмогорова для функций многих комплексных переменных.

Пусть в области $D^*_l = D_1 \times D_2 \times \dots \times D_l$ где $D_k = \{z_k : |z_k| \le$ $\le 1\}$, $k = 1, 2, \dots, l$, определено множество аналитических функций l комплексных переменных.

Пусть в области $D^*_m = D_1 \times D_2 \times \dots \times D_m$, $1 \le m < l$, определено множество комплексных функций $\{\varphi_\alpha(z_1, \dots, z_m)\}$, $z_j \in D_j$, $j =$

$1, 2, \ldots, m$, имеющих непрерывные частные производные по x_j и y_j $(z_j = x_j + iy_j)$, $j = 1, 2, \ldots, m$.

Проблема Колмогорова для функций многих комплексных переменных может быть сформулирована следующим образом: «Существует аналитическая функция l комплексных переменных, определенная в области D_l^*, $l = 3, 4, \ldots$, и не представимая в виде суперпозиций функций m комплексных переменных $(2 \leq m < l)$, определенных в области D_m^* и имеющих непрерывные частные производные первого порядка по переменным x_j и y_j $(z_j = x_j + iy_j)$, $j = 1, 2, \ldots, m$.

Существует аналитическая функция двух комплексных переменных, определенная в области D_2^* и не представимая в виде суперпозиций функций одной комплексной переменной, определенных в области D_1^* и имеющих непрерывно частные производные первого порядка по переменным x и y $(z = x + iy)$, и операции сложения».

Теорема 2.2. Существуют аналитические функции l комплексных переменных $(l \geq 3)$, определенные в области D_l^* и не представимые в виде суперпозиций функций m комплексных переменных $(2 \leq m < l)$, определенных в области D_m^* и имеющих непрерывные частные производные по переменным x_j и y_j $(z_j = x_j + iy_j)$, $j = 1, 2, \ldots, m$.

Доказательство. При доказательстве для определенности ограничимся случаем трех комплексных переменных, так как полученные результаты практически дословно распространяются на другие случаи.

Пусть $C-$ поле комплексных чисел, γ_i- окружность радиуса 1 в комплексной плоскости $z_i : \gamma_i = \{z_i : |z_i| = 1\}, i = 1, 2, 3$. Пусть $\gamma = \gamma_1 \times \gamma_2 \times \gamma_3$ и $z = (z_1, z_2, z_3)$. Обозначим через D_i^+ множество точек, удовлетворяющих неравенству $|z_i| < 1, i = 1, 2, 3$. Пусть $D^+ = D_1^+ \times D_2^+ \times D_3^+$ и $D = D^+ \cup \gamma$. Обозначим через $A(D)$ банахово пространство функций, непрерывных в области D и аналитических в области D^+. Норму в $A(D)$ введем формулой $\|f\| = \max_\gamma |f(z_1, z_2, z_3)|$.

Обозначим через $\tau_k, k = 0, 1, \ldots, 2n$, узлы $\tau_k = \exp\{is_k\}, s_k = 2k\pi/(2n + 1), k = 0, 1, \ldots, 2n$, через $\psi_k(z)-$ фундаментальные функции интерполяционных полиномов по узлам $\tau_k, k = 0, 1, \ldots, 2n$. Очевидно,

$$\psi_k(z) = \frac{(z - \tau_0) \ldots (z - \tau_{k-1})(z - \tau_{k+1}) \ldots (z - \tau_{2n})}{(\tau_k - \tau_0) \ldots (\tau_k - \tau_{k-1})(\tau_k - \tau_{k+1}) \ldots (\tau_k - \tau_{2n})}.$$

Построим функцию

$$\psi_{ijl}(z_1, z_2, z_3) =$$

$$= \frac{1}{30}\left(\frac{1}{\ln n}\sum_{k=0}^{2n}\alpha_{ik}\psi_k(z_1)\right)\left(\frac{1}{\ln n}\sum_{k=0}^{2n}\beta_{jk}\psi_k(z_2)\right)\left(\frac{1}{\ln n}\sum_{k=0}^{2n}\gamma_{lk}\psi_k(z_3)\right),$$

где $\alpha_{ik}, \beta_{jk}, \gamma_{lk}$ принимают значения ± 1.

Функции $\psi_{ijl}(z_1, z_2, z_3)-$ непрерывные в области D и аналитические в области D^+. Известно [34, с.95], что константа Лебега при интерполировании по Лагранжу по равноотстоящим узлам $\tau_i, i = 0, 1, \ldots, 2n$, меньше, нежели $3\ln(n+1)$. Следовательно, при $n \geq 3$

$$\max_{ijl}\max_{(z_1,z_2,z_3)\in\gamma}|\psi_{ijl}(z_1, z_2, z_3)| < 1; \quad |\psi_{ijl}(\tau_r, \tau_v, \tau_w) = \frac{1}{30}\left(\frac{1}{\ln n}\right)^3.$$

Здесь $r, v, w-$ целые числа $(0 \leq r, v, w \leq 2n)$.

Пусть $\varepsilon = (30)^{-1}\ln^{-3} n$. Из предыдущих выкладок следует, что построено $2^{3(2n+1)}$ ε- различимых функций $\psi_{ijl}(z_1, z_2, z_3), i, j, l = 0, 1, \ldots, 2n$.

Обозначим через A^* множество функций $f(z_1, z_2, z_3) \in A(D)$, удовлетворяющих неравенству $\|f(z_1, z_2, z_3)\| \leq 1$.

Применяя формулу Колмогорова $-$ Витушкина, имеем:

$$H_\varepsilon(A^*) \geq B\exp\left\{\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^{1/3}\right\}.$$

Покажем, следуя доказательству теоремы А. Г. Витушкина, приведенному в [85], что суперпозиции непрерывно дифференцируемых по x_j и y_j $(z_j = x_j + iy_j)$, $j = 1, 2$, функций двух переменных образуют множество нигде не плотное в A^*. Как уже отмечалось выше, суперпозициями нулевого ранга являются просто функции двух комплексных переменных. Очевидно, существуют функции трех комплексных переменных, не представимые функциями двух комплексных переменных.

Функции первого ранга имеют вид

$$\varphi_1(u_1(z_1, z_2), v_1(z_2, z_3)),\ \varphi_2(u_2(z_1, z_2), v_2(z_1, z_3)),\ \varphi_3(u_3(z_2, z_3), v_3(z_1, z_3))$$

и так далее. Эти функции являются суперпозициями от функций нулевого ранга.

Покажем, что подобными суперпозициями, где функции u имеют непрерывные частные производные первого порядка по x_j и y_j $(z_j = x_j + iy_j)$ не исчерпываются все аналитические функции трех комплексных переменных.

Функции первого ранга имеют вид $\varphi_1(u_1(v_i, v_j), u_2(v_k, v_l))$. Эти функции являются суперпозициями от функций нулевого ранга.

Покажем, что суперпозициями первого ранга вида

$$f(z_1, z_2, z_3) = \varphi(u_1(z_1, z_2), u_2(z_1, z_3)) \tag{2.3}$$

и подобными, где функции φ, u_1, u_2 имеют непрерывные частные производные первого порядка, не исчерпываются все аналитические функции трех комплексных переменных.

Рассмотрим множество $S_1(C)$ функций вида (2.3), где функции φ, u_1, u_2 принадлежат классу $K_1^2(D^2, C)$ с фиксированной константой C. Функции из класса $K_1^2(D^2, C)$ удовлетворяют условию Липшица с константой C_1. Можно показать, что, вычисляя функции φ_1, u_1, u_2 с точностью до ε, функцию $g_1 = \varphi_1(u_1, u_2)$ можно вычислить с точностью до $\gamma\varepsilon$. Тогда из правой части формулы Колмогорова – Витушкина имеем

$$H_{\gamma\varepsilon}(S_1(C)) \leq \alpha(C) \left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^4. \tag{2.4}$$

При любых константах $\alpha(C)$ и B можно выбрать ε столь малым, что $\alpha(C)\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^4 < B\exp\{\left(\frac{1}{\mathrm{A}\varepsilon}\right)^{1/3}\}$. Отсюда следует, что множество $S_1(C)$ нигде неплотно в A^*.

С другой стороны, множество S_1 всех функций вида

$$S_1 = S_1(1) \bigcup S_1(2) \bigcup \cdot \bigcup S_1(n) \bigcup \cdots$$

есть счетное объединение нигде не плотных в A^* множеств. Отсюда и из общих теорем теории множеств вытекает, что дополнение к S_1 в A^* всюду плотно.

Для любой фиксированной суперпозиции S_k ранга k по индукции аналогично доказывается, что при достаточно малом ε имеем $H_\varepsilon(S_k(C)) < H_\varepsilon(A^*))$ и, следовательно, S_k нигде не плотно в A^*. Число всех суперпозиций ранга k конечно, поэтому, множество всех конечных суперпозиций счетно, т. е. мы опять получаем сумму счетного числа, нигде не плотных множеств. Теорема доказана.

Теорема 2.3. Существуют аналитические функции многих действительных переменных, не представимые в виде суперпозиций непрерывно дифференцируемых функций меньшего числа действительных переменных.

Доказательство. Для простоты обозначений ограничимся случаем функций трех переменных. Рассмотрим множество гармонических функций, определенных в шаре G радиуса $R = \pi$ с центром в начале координат и непрерывных на сфере S радиуса $R = \pi$ с центром в начале координат. Множество таких функций можно представить интегралом Пуассона

$$u(r,\theta,\varphi)=\frac{1}{2\pi R}\int\limits_S f(\theta',\varphi')\frac{R^2-r^2}{(R^2-2rR\cos\gamma+r^2)^{3/2}}d\sigma, \qquad (2.5)$$

где $\gamma-$ угол между радиусами-векторами точек (r,θ,φ) и (R,θ',φ').

Обозначим через θ_v и φ_w узлы $\theta_v=v\pi/n, v=0,1,\ldots,n$, и $\varphi_w= =2\pi w/(2n+1), w=0,1,\ldots,2n$, через $\psi_v(\theta)-$ фундаментальные полиномы по узлам $\theta_v=v\pi/n, v=0,1,\ldots,n$, через $\psi^*_w(\varphi)-$ фундаментальные полиномы по узлам $\varphi_w, w=0,1,\ldots,2n$. Обозначим через λ_n и λ^*_{2n+1} константы Лебега интерполирования по узлам θ_v, $v=0,1,\ldots,n$, и $\varphi_w, w=0,1,\ldots,2n$.

Введем семейство функций

$$u_{ij}(\theta,\varphi)=\frac{1}{\lambda_n\lambda^*_{2n+1}}\left(\sum_{k=0}^{n}\alpha_{in}\psi_n(\theta)\right)\left(\sum_{k=0}^{2n}\beta_{jn}\psi^*_n(\varphi)\right),$$

где α_{in} и β_{jn} принимают значения, равные ±1. Рассмотрим семейство гармонических функций, определенных интегралом Пуассона, в котором плотностью являются функции $u_{ij}(\theta,\varphi)$. Таким образом построено семейство из $2^{(2n+1)n}$ аналитических функций, отличающихся друг от друга на величину $2/(\lambda_n\lambda_{2n+1})$. Положим $\varepsilon=2/(\lambda_n\lambda^*_{2n+1})$. Относительно констант Лебега известно [62], что $(\ln n)/(8\pi)\le\lambda^*_{2n+1}\le$
$\le A+B\ln n,\ (\ln n)/(8\pi)\le\lambda_n$. Поэтому $\varepsilon<2(8\pi)^2/\ln^2 n$.

Обозначим через A сужение гармонических функций, определяемых формулой (2.5) на область $\tilde G:((r,\Theta,\varphi)\in\tilde G:\{0\le r\le\pi,0\le \le\Theta\le\pi,0\le\varphi\le\pi\})$. Через $\tilde S$ обозначим границу области $\tilde G$. Из предыдущих рассуждений следует, что в области $\tilde G$ существует 2^{n^2} $\varepsilon-$ различимых функций.

Из формулы Колмогорова − Витушкина следует оценка

$$H_\varepsilon(A^*)\ge B\exp\{2\sqrt{\frac{1}{\varepsilon}}\}.$$

Опишем процесс построения суперпозиций в области $\tilde G$. Суперпозициями нулевого ранга называются функции вида $u_1(r,\varphi)$, $u_2(r,\Theta)$, $u_3(\varphi,\Theta)$, аргументы которых определены в сегментах $0\le r,\Theta,\varphi\le\pi$, а значения расположены в сегменте $[0,\pi]$.

Суперпозициями первого ранга называются функции вида
$\varphi_1(u_1(r,\varphi),u_2(r,\Theta))$, $\varphi_2(u_1(r,\varphi),u_3(\Theta,\varphi))$ и т. д., причем значения функций φ_i лежат в сегменте $[0,\pi]$.

Суперпозиции второго и последующих рангов строятся по индукции. Процесс их построения аналогичен описанному выше при доказательстве теоремы Витушкина. Единственное отличие заключается в том, что областью определения функций, входящих в суперпозиции, является квадрат $[0,\pi]^2$, с областью значений – сегмент $[0,\pi]$.

Дальнейшее доказательство теоремы проводится так же, как доказательство теоремы 2.2.

3. Существование аналитических функций двух вещественных переменных, не представимых в виде суперпозиций непрерывно дифференцируемых функций одной вещественной переменной и операции сложения

Теорема 3.1. Существуют аналитические функции двух вещественных переменных, не представимые в виде суперпозиций непрерывно дифференцируемых функций одной вещественной переменной и операции сложения.

Доказательство. Ниже используются обозначения, описанные при доказательстве теоремы 2.3, и рассуждения, приведенные при ее доказательстве. Основное отличие заключается в том, что вместо интеграла Пуассона, определенного на сфере радиуса π, рассматривается интеграл Пуассона, отределенный на окружности радиуса π. Отметим, что в этом случае ε-энтропия множества A оценивается неравенством $H_\varepsilon(A) \geq B\exp(\varepsilon^{-1})$.

Таким образом, осталось доказать, что существуют аналитические функции двух вещественных переменных, не представимые суперпозициями непрерывно дифференцируемых функций одной вещественной переменной и операцией сложения. Доказательство проведем по индукции.

Суперпозициями нулевого ранга являются просто функции одной вещественной переменной. Очевидно, существуют функции двух вещественных переменных, не представимые функциями одной вещественной переменной.

Функции нулевого ранга имеют вид $u_1(x_1), u_2(x_2)$.

Функции нулевого ранга принадлежат классу $W_1^1(\pi, C)$, где константа C принимает значения $C = 1, 2, \ldots$.

Рассмотрим суперпозиции первого ранга и операцию сложения. В результате получаем функции вида

$$f(r,\theta) = \varphi(u_1(r) + u_2(\theta)).$$

Так как функции первого ранга принадлежат классу $W_1^1(\pi, C)$, то из неравенства Витушкина – Колмогорова следует, что

$$H_\varepsilon \leq \alpha(C)\frac{1}{\varepsilon}.$$

Дальнейшее доказательство теоремы проводится по аналогии с доказательством теоремы 2.3.

Глава 5

АДАПТИВНЫЕ МЕТОДЫ ВОССТАНОВЛЕНИЯ ФУНКЦИЙ

1. Адаптивные алгоритмы восстановления функций на классе $\mathbf{W_p^r(1)}$

Исследуем погрешность восстановления адаптивными алгоритмами в пространстве L_∞ функций из класса $W_p^r(1)$, определенных на сегменте $[-1,1]$.

Разобьем сегмент $[-1,1]$ на $M=[N/2]$ равных частей точками $w_k=-1+2k/M, k=0,1,\ldots,M$. Введем обозначения

$$\delta_k=[\int\limits_{w_k}^{w_{k+1}} \mid f^{(r)}(t)\mid^p dt]^{1/p}, k=0,1,\ldots,M-1.$$

Пусть $\delta_k=m_k/M^{1/p}$, $k=0,1,\ldots,M-1$.

Зафиксируем произвольное значение k $(0\le k\le M-1)$ и рассмотрим две возможности: 1) $m_k\le 1$; 2) $m_k>1$.

В первом случае на сегменте $d_k=[w_k,w_{k+1}]$ функция $f(t)$ аппроксимируется отрезком ряда Тейлора $T_{r-1}(f,d_k,w_k)$. Погрешность аппроксимации равна

$$\mid f(t)-T_{r-1}(f,d_k,w_k)\mid\le$$

$$\le\frac{1}{(r-1)!}\int\limits_{w_k}^{t}(t-\tau)^{r-1}|f^{(r)}(\tau)|d\tau\le AM^{-r+1/p}\delta_k\le AM^{-r}\le AN^{-r}.$$

Во втором случае разделим сегмент $[w_k,w_{k+1}]$ на $n_k=[m_k^{p/(rp+1)}]$ равных частей. В результате получаем сегменты $d_{k,j}=[w_{k,j},$ $w_{k,j+1}], w_{k,j}=w_k+j(w_{k+1}-w_k)/n_k, j=0,1,\ldots,n_k$. На каждом сегменте $d_{k,j}$ аппроксимация функции $f(t)$ проводится отрезком ряда Тейлора
$T_{r-1}(f,d_{k,j},w_{k,j})$. Погрешность этой аппроксимации оценивается величиной AN^{-r}.

Покажем, что $\sum_{k=0}^{M-1}n_k=AN$. В самом деле,

$$\frac{1}{M}\sum_{k=0}^{M-1}(m_k)^p=\sum_{k=0}^{M-1}\delta_k^p=\int\limits_{-1}^{1}\mid f^{(r)}(t)\mid^p dt\le 1.$$

Воспользовавшись неравенством Гельдера с $q = 1/(rp-1)$ и $q' = = 1/(2-rp)$ $(r > 2/p)$, вычисляем:

$$1 \geq \frac{1}{M}\sum_{k=0}^{M-1} m_k^p \geq \frac{1}{M}\left(\sum_{k=0}^{M-1}(m_k)^{p/(rp-1)}\right)^{rp-1}\left(\sum_{k=0}^{M-1}1\right)^{2-rp} \geq$$

$$\geq M^{1-rp}\left(\sum_{k=0}^{M-1} m_k^{p/(rp-1)}\right)^{rp-1}.$$

Отсюда $\sum_{k=0}^{M-1} m_k^{p/(rp-1)} \leq M$ и, следовательно, учитывая только те участки разбиения, на которых $m_k > 1$, убеждаемся, что число добавленных участков разбиения не превышает M, т. е. $\sum_{k=0}^{M-1} n_k \leq M$.

Таким образом, при добавлении M новых участков разбиения погрешность аппроксимации функции $f(t) \in W_p^r(1)$ не превосходит AN^{-r}.

В ряде случаев представляют интерес оценки погрешности восстановления функции $f(t) \in W_p^r(1)$ в метрике пространства $L_q[-1,1], 1 \leq$
$\leq q \leq \infty$.

Разобьем сегмент $[-1,1]$ на $M = [N/2]$ равных частей точками $w_k = -1 + 2k/M, k = 0,1,\ldots,M$. Введем обозначения

$$\delta_k = \left[\int\limits_{w_k}^{w_{k+1}} \mid f^{(r)}(t) \mid^p dt\right]^{1/p}, k = 0,1,\ldots,M.$$

Пусть $\delta_k = m_k/N^{1/p}$, $k = 0,1,\ldots,M$. Зафиксируем произвольное значение k и рассмотрим две возможности: 1) $m_k \leq 1$; 2) $m_k > 1$.

В первом случае на сегменте $d_k = [w_k, w_{k+1}]$ функция $f(t)$ аппроксимируется отрезком ряда Тейлора $T_{r-1}(f, d_k, w_k)$. Погрешность аппроксимации определяется из следующих неравенств

$$\int\limits_{w_k}^{w_{k+1}} \mid f(t) - T_{r-1}(f, d_k, w_k) \mid^q dt \leq$$

$$\leq \frac{1}{(r-1)!}\int\limits_{w_k}^{w_{k+1}} |\int\limits_{w_k}^{t}(t-\tau)^{r-1}f^{(r)}dt|^q dt \leq$$

$$\leq A(w_{k+1}-w_k)^{(r-1/p)q+1} \parallel f^{(r)} \parallel_{L_p(d_k)}^q \leq \frac{A}{N^{(r-1/p)q+1}} \parallel f^{(r)} \parallel_{L_p(d_k)}^q \leq$$

$$\leq AN^{-rq-1}.$$

Во втором случае разделим сегмент d_k на $n_k = [m_k^{qp/((rp-1)q+p)}]$ равных частей. В результате разбиения получаем сегменты $d_{k,j} = [w_{k,j}, w_{k,j+1}], w_{k,j} = w_k + j(w_{k+1} - w_k)/n_k, j = 0, 1, \ldots, n_k$. На каждом сегменте $d_{k,j}$ аппроксимация функции $f(t)$ осуществляется отрезком ряда Тейлора $T_{r-1}(f, d_{k,j}, w_{k,j})$. Погрешность этой аппроксимации оценивается величиной AN^{-rq-1}.

Обозначим через $f_M(t)$ сплайн, который на каждом сегменте $d_{k,j}$ (если $j = 0$, то $d_{k,j} = d_k$) совпадает с соответствующим отрезком ряда Тейлора. Из полученных выкладок следует, что

$$\|\varphi(t) - \varphi_M(t)\|_{L_q[-1,1]} \le AN^{-r-1/q}.$$

Оценим число дополнительных сегментов, которые вводятся при построении сплайна $\varphi_M(t)$.

Нетрудно видеть, что

$$\sum_{k=0}^{M-1} \left(\frac{m_k}{N^{1/p}}\right)^p = \sum_{k=0}^{M-1} \int\limits_{w_k}^{w_{k+1}} \left|\varphi^{(r)}(t)\right|^p dt \le 1.$$

Воспользовавшись неравенством Гельдера с $v = q/((rp-1)q+p)$ и $v' = q/(2q - rpq - p)$ $(rpq + p > 2q)$, вычисляем:

$$1 \ge \sum_{k=0}^{M-1} \left(\frac{m_k}{N^{1/p}}\right)^p = \frac{1}{N} \left(\sum_{k=0}^{M-1} m_k^{pq/((rp-1)q+p)}\right)^{rp-1+p/q} M^{2-rp-p/q}.$$

Отсюда

$$\left(\sum_{k=0}^{M-1} m_k^{pq/((rp-1)q+p)}\right)^{rp-1+p/q} \le NM^{(rpq+p-2q)/q} \le N^{(rpq+p-q)/q}.$$

Следовательно, число сегментов, которые добавляются при построении алгоритма, не превышает N.

Таким образом, построен адаптивный алгоритм, использующий AN узлов функции $\varphi(t) \in W_p^r(1)$ и восстанавливающий ее в метрике L_q с точностью $AN^{-r-1/q}$.

Интересно сравнить полученный результат с точностью пассивных алгоритмов. Известны [43] оценки поперечников Колмогорова

$$d_N(W_p^r, L_q) \asymp \begin{cases} N^{-r-1/2+1/p} & \text{при } 1 \le p \le 2, q \ge 2, \\ N^{-r} & \text{при } 2 \le p \le q \le \infty, \\ N^{-r-1/q+1/p} & \text{при } 1 < p \le q \le 2, \end{cases}$$

характеризующие точность пассивных алгоритмов.

Из сопоставления оценок точности пассивных и адаптивных алгоритмов восстановления функций на классе $W_p^r(1)$ следует, что при $q \neq \infty$, а также при $q = \infty$ и $1 < p < 2$ точность адаптивных алгоритмов выше нежели пассивных.

2. Адаптивные алгоритмы восстановления функций на классе $\mathbf{Q_{r,\gamma,p}([-1,1],M)}$

Теорема 2.1. Пусть $f(x) \in Q_{r,\gamma,p}(\Omega, M), \Omega = [-1,1],\ sp > 2$. Существует адаптивный алгоритм, использующий значения функции $f(x)$ и ее производных до $(s-1)$-го порядка в n узлах и имеющий в метрике пространства L_∞ погрешность

$$R_n(f) \leq A \begin{cases} n^{-s}, & \text{если } \gamma < (s-\gamma)(sp-2), \\ n^{-(s-\gamma)(sp-1)}, & \text{если } \gamma > (s-\gamma)(sp-2), \\ n^{-s}(\ln n)^{s(sp-2)(sp-1)}, & \text{если } \gamma = (s-\gamma)(sp-2). \end{cases} \quad (2.1)$$

Замечание. Сравним эту оценку с точностью пассивных алгоритмов. В разделе 2 главы 2 показано, что поперечник Колмогорова оценивается снизу неравенством

$$d_n(Q_{r,\gamma,p},(\Omega,M),L_q) \geq A \begin{cases} n^{-s+1/p-1/q} & \text{при } q \leq 2, \\ n^{-s+1/p-1/2} & \text{при } p \leq 2,\ q > 2, \\ n^{-s} & \text{при } p > 2. \end{cases}$$

Следовательно, при $p < 2$ погрешность пассивных алгоритмов оценивается величиной не меньшей чем $An^{-s+1/p-1/2}$ в то время, как существует адаптивный алгоритм с погрешностью восстановления функцией из $Q_{r,\gamma,p}(\Omega, M)$, характеризуемый неравенством (2.1).

Доказательство. Разобьем сегмент $[-1,1]$ на $2N$ частей точками $t_k^1 = -1 + (k/N)^v,\ t_k^2 = 1 - (k/N)^v,\ v = s/(s-\gamma)$.

Введем обозначения $\triangle_k^1 = [t_k^1, t_{k+1}^1],\ \triangle_k^2 = [t_{k+1}^2, t_k^2]$; через c_k^i обозначается середина сегмента $\triangle_k^i$. На сегментах $\triangle_0^i\,(i = 1,2)$ погрешность аппроксимации функции $\varphi(x)$ отрезком ряда Тейлора $T_\beta(\varphi, \triangle_0^i, c_0^i)$ оценивается неравенством ($\beta = r-1$ при γ целом, $\beta =$ r при γ
нецелом)

$$\|\varphi(t) - T_\beta(\varphi, \triangle_0^i, c_0^i)\| \leq AN^{-s},\ \ i = 1,2.$$

На сегменте $\triangle_k^i$, $k = 1, \ldots, N-1,\ i = 1,2$, погрешность аппроксимации $\varphi(t)$ отрезком ряда Тейлора $T_{s-1}(\varphi, \triangle_k^i, c_k^i)$ оценивается неравенством

$$\|\varphi(t) - T_{s-1}(\varphi, \triangle_k^i, c_k^i)\| \le \frac{1}{(s-1)!}\left|\int\limits_{c_k^i}^{t}(t-x)^{s-1}\varphi^{(s)}(x)dx\right| \le$$

$$\le A(h_k^i)^{s-1/p}\left[\int\limits_{\triangle_k^i}|\varphi^{(s)}(x)|^p dx\right]^{1/p},$$

где $h_k^i = |t_{k+1}^i - t_k^i|$, $i = 1, 2$, $k = 1, 2, \ldots, N-1$.

Ниже для определенности положим $i = 1$. Введем обозначения

$$\psi(t_k^1) = \left[\int\limits_{\triangle_k^1}|\varphi^{(s)}(t)|^p dt\right]^{1/p}.$$

Пусть $\psi(t_k^1) = m_k^1(h_k^1)^{1/p}(N/(k+1))^{v\gamma}$. Рассмотрим две возможности: 1) $m_k^1 \le 1$; 2) $m_k^1 > 1$.

В первом случае

$$|\varphi(t) - T_{s-1}(\varphi, \triangle_k^1, c_k^1)| \le A(h_k^1)^s\left(\frac{N}{k+1}\right)^{v\gamma} \le AN^{-s}$$

и на сегментах, для которых выполнено это условие, аппроксимация функции $\varphi(x)$ осуществляется полиномом $T_{s-1}(\varphi, \triangle_k^1, c_k^1)$.

Перейдем ко второму случаю. Пусть $\psi(t_k^1) = m_k^1(h_k^1)^{1/p}(N/(k+1))^{v\gamma}$. Разделим сегмент $\triangle_k^1$ на $n_k^1 = [(m_k^1)^{p/(sp-1)}]$ равных частей. Тогда погрешность на каждом участке разбиения не превосходит величины

$$A(h_k^1/n_k^1)^{s-1/p}m_k^1(h_k^1)^{1/p}(N/(k+1))^{v\gamma} \le AN^{-s}.$$

Покажем, что $\sum_{k=0}^{N-1} n_k^1 \le AN$. В самом деле,

$$\sum_{k=0}^{N-1}(m_k^1)^p h_k^1 = \sum_{k=0}^{N-1}\left(\frac{k+1}{N}\right)^{v\gamma p}(\psi(t_k^1))^p = \sum_{k=0}^{N-1}\left(\frac{k+1}{N}\right)^{v\gamma p}\int\limits_{\triangle_k^1}|\varphi^{(s)}(t)|^p dt \le$$

$$\le 2\int\limits_{-1}^{0}|d(t,\Gamma)\varphi^{(s)}(t)|^p dt \le 2.$$

Воспользовавшись неравенством Гельдера с $q = 1/(sp-1)$ и $q' = = 1/(2-sp)$ $(s > 2/p)$, имеем:

$$2 \geq \sum_{k=0}^{N-1} (m_k^1)^p h_k^1 \geq \left(\sum_{k=1}^{N-1} (m_k^1)^{p/(sp-1)} \right)^{sp-1} \left(\sum_{k=1}^{N-1} (h_k^1)^{1/(2-sp)} \right)^{2-sp} \geq$$

$$\geq \left(\sum_{k=1}^{N-1} (m_k^1)^{p/(sp-1)} \right)^{sp-1} \left(1/ \left(\sum_{k=1}^{N-1} (h_k^1)^{1/(2-sp)} \right) \right)^{sp-2} \geq$$

$$\geq \frac{A}{N^v} \left(\sum_{k=1}^{N-1} (m_k^1)^{p/(sp-1)} \right)^{sp-1} \left(1/ \left(\sum_{k=1}^{N-1} k^{-\gamma/(s-\gamma)(sp-2)} \right) \right)^{sp-2} \geq$$

$$\geq \frac{A}{N^{sp-1}} \left(\sum_{k=1}^{N-1} (m_k^1)^{p/(sp-1)} \right)^{sp-1}. \qquad (2.2)$$

Последний переход в цепочке неравенств был сделан в предположении, что $\gamma/(s-\gamma)(sp-2) < 1$. Из неравенства (2.2) при сделанном выше предположении следует, что

$$\sum_{k=0}^{N-1} n_k^1 = \sum_{k=1}^{M-1} (m_k^1)^{p/(sp-1)} \leq AN. \qquad (2.3)$$

Отметим, что в случае, когда $\gamma/(s-\gamma)(sp-2) > 1$, неравенство (2.2) преобразуется в следующее:

$$2 \geq \sum_{k=1}^{N-1} (m_k^1)^p h_k^1 \geq \frac{A}{N^v} \left(\sum_{k=1}^{N-1} (m_k^1)^{p/(sp-1)} \right)^{sp-1}.$$

Отсюда

$$\sum_{k=0}^{N-1} n_k^1 = \sum_{k=1}^{N-1} (m_k^1)^{p/(sp-1)} \leq AN^{v/(sp-1)} = AN^{s/(s-\gamma)(sp-1)}. \qquad (2.4)$$

В случае, когда $\gamma = (s-\gamma)(sp-2)$, неравенство (2.2) имеет вид

$$2 \geq \sum_{k=1}^{N-1} (m_k^1)^p h_k^1 \geq \frac{A}{N^v (\ln N)^{(sp-2)}} \left(\sum_{k=1}^{N-1} (m_k^1)^{p/(sp-1)} \right)^{sp-1}.$$

Отсюда

$$\sum_{k=0}^{N-1} n_k^1 = \sum_{k=0}^{N-1} (m_k^1)^{p/(sp-1)} \leq AN^{s/(s-\gamma)(sp-1)} (\ln N)^{(sp-2)/(sp-1)}. \qquad (2.5)$$

Вернемся к неравенству (2.3). Из него следует, что при $\gamma/(s-\gamma)(sp-2) < 1$, добавляя в случае необходимости AN новых узлов, добиваемся погрешности AN^{-s}.

Перейдем к случаю, когда $\gamma/(s-\gamma)(sp-2)>1$. Из последнего неравенства следует, что $s/(s-\gamma)(sp-1)>1$. Очевидно,

$$\frac{\gamma}{(s-\gamma)(sp-2)}=\frac{s}{(s-\gamma)(sp-1)}+\left(\frac{s}{(s-\gamma)(sp-1)}-1\right)\frac{1}{sp-2}. \tag{2.6}$$

Если предположить, что $s/(s-\gamma)(sp-1)\leq 1$, то из условия $\gamma/(s-$
$-\gamma)(sp-2)>1$ и равенства (2.6) получаем $s/(s-\gamma)(sp-1)>1$. Из этого противоречия следует, что $s/(s-\gamma)(sp-1)>1$. Таким образом, в рассматриваемом случае для достижения точности AN^{-s} адаптивный алгоритм требует использования $n_1=AN^{s/(s-\gamma)(sp-1)}$ узлов, т. е. его точность, выраженная через число используемых функционалов, равна $An_1^{-(s-\gamma)(sp-1)}$.

Рассмотрим случай, когда $\gamma/(s-\gamma)(sp-2)=1$. Из (2.6) следует, что тогда $s/(s-\gamma)(sp-1)=1$. Таким образом, в данном случае для достижения точности AN^{-s} адаптивный алгоритм требует использования $n_1=AN(\ln N)^{(sp-2)/(sp-1)}$ узлов, т. е. его точность, выраженная через число используемых функционалов, равна $An_1^{-s}(\ln n_1)^{s(sp-2)/(sp-1)}$. Теорема доказана.

Замечание. На каждом участке разбиения вместо отрезка ряда Тейлора можно использовать интерполяционные полиномы, построенные по узлам Чебышева первого рода, отображенным аффинным преобразованием с сегмента $[-1,1]$ на сегмент разбиения. Нетрудно видеть, что при этом все оценки остаются неизменными.

Отметим случаи, когда описанный выше адаптивный алгоритм может быть использован на практике. К ним относятся следующие:

1) производная $\varphi^{(s)}(x)$ односторонне ограничена всюду, кроме множества меры нуль;

2) функция $\varphi(x)$ может быть представлена в виде суммы двух функций $\varphi(x)=\varphi_1(x)+\varphi_2(x)$, каждая из которых имеет односторонне ограниченные всюду, кроме множества меры нуль, производные $\varphi_1^{(s)}(x)$ и $\varphi_2^{(s)}(x)$. (К этому случаю относятся, например, функции $\varphi(x)=$
$=\sum\limits_{i=1}^{n}\rho_i(x)\psi(x),\ \varphi(x)=\prod\limits_{i=1}^{n}\rho_i(x)\psi(x)$, где $\varphi(x)-$ непрерывная функция; $\rho_i(x)-$ весовые функции);

3) вариация V функции $\varphi^{(s-1)}(x)$ может быть легко вычислена (или достаточно точно оценена сверху) на любом сегменте $\Delta_k^i, k=$
$1,2,\ldots,N-$

$-1, i = 1, 2.$

Применимость алгоритма в первых двух случаях следует из доказательства теоремы. Поэтому остановимся на третьем случае, полагая $p = 1$.

В этом случае погрешность на сегменте Δ_k^1 $(k = 1, 2, \ldots, N-1)$ оценивается неравенством (на сегментах Δ_k^2 $(k = 1, 2, \ldots, N-1)$ оценка проводится аналогично):

$$\left|\varphi(x) - T_{s-1}(\varphi, \Delta_k^1, c_k^1)\right| \leq \frac{1}{(s-1)!}\left|\int\limits_{c_k^1}^{x}(x-t)^{s-1}\varphi^{(s)}(t)dt\right| \leq$$

$$\leq Ah_k^{s-1}\int\limits_{\Delta_k^1}\left|\varphi^{(s)}(t)\right|dt = Ah_k^{s-1}V(\varphi^{(s-1)}, \Delta_k^1),$$

где $V(\varphi^{(s-1)}, \Delta_k^1)-$ полное изменение функции $\varphi^{(s-1)}$ на сегменте Δ_k^1.

Здесь использована известная [76, с. 58] теорема о полном изменении неопределенного интеграла от суммируемой функции.

Остальные выкладки аналогичны приведенным при доказательстве теоремы.

3. Адаптивные алгоритмы восстановления на классе функций Соболева

Обозначим через $W_p^r(\Omega),\ \Omega = [-1, 1]^l, l \geq 2$ пространство Соболева с нормой

$$\|\varphi\|_{W_p^r(\Omega)} = \|\varphi\|_{L_p(\Omega)} + \|\varphi\|_{L_p^r(\Omega)},$$

где

$$\|\varphi\|_{L_p^r(\Omega)} = \left[\sum_{|v|=r}\int\limits_{\Omega} \mid D^v\varphi \mid^p dt\right]^{1/p},$$

$v = (v_1, \ldots, v_l), \mid v \mid = v_1 + \ldots + v_l, t = (t_1, \ldots, t_l),\ D^v\varphi = \partial^{|v|}\varphi/\partial_1^{v_1}\ldots\partial t_l^{v_l}$ и рассмотрим множество функций $\varphi \in W_p^r(\Omega)$, удовлетворяющих условию $\|\varphi\|_{W_p^r(\Omega)} \leq M$.

Во второй главе были приведены оценки поперечников Колмогорова на классе функций $W_p^r(\Omega)$.

Сопоставляя эти оценки с приведенными ниже оценками точности восстановления функций адаптивными алгоритмами, убеждаемся, что при $q = \infty$ и $1 \leq p \leq 2$, а также при $q < \infty$ адаптивные алгоритмы точнее пассивных.

Построим адаптивный алгоритм восстановления функции из $W_p^r(\Omega)$.

Разделим i-ю ($i = 1,2,\ldots,l$) сторону куба Ω на n частей точками $t_k^i = -1 + 2k/n$, $k = 0,1,\ldots,n$, $i = 1,2,\ldots,l$. В результате разбиения Ω образуются более мелкие кубы $\triangle_{i_1,\ldots,i_l} = [t^1_{i_1}, t^1_{i_1+1};\ldots;t^l_{i_l}, t^l_{i_l+1}]$.

Обозначим через $P_r^{t_1}(\varphi(t_1,\ldots,t_l),[-1,1])$ интерполяционный полином степени $r-1$, аппроксимирующий функцию $\varphi(t_1,\ldots,t_l)$ на сегменте $[-1,1]$ по переменной t_1 и по узлам полинома Чебышева первого рода порядка r . Через $P_r^{t_1}(\varphi(t_1,\ldots,t_l),[t^1_k,t^1_{k+1}])$ обозначим интерполяционный полином, полученный из $P_r^{t_1}(\varphi,[-1,1])$ при отображении $[-1,1]$ на $[t^1_k,t^1_{k+1}]$. Через $\varphi_r(t_1,\ldots,t_l;\triangle_{i_1,\ldots,i_l})$ обозначим интерполяционный полином

$$\varphi_r(t_1,\ldots,t_l;\triangle_{i_1,\ldots,i_l}) = P_r(\varphi,\triangle_{i_1,\ldots,i_l}) = P_r^{t_1}\ldots P_r^{t_l}(\varphi(t_1,\ldots,t_l);\triangle_{i_1,\ldots,i_l}).$$

Нетрудно видеть, что для введенного выше интерполяционного полинома $P_r(\varphi,\triangle_{i_1,\ldots,i_l})$ справедливо соотношение

$$\begin{gathered}\|\varphi - P_r(\varphi,\triangle_{i_1,\ldots,i_l})\|_C = \\ = \|\varphi - P_{\triangle_{i_1,\ldots,i_l}}(\varphi,\triangle_{i_1,\ldots,i_l}) - P_r(\varphi - P_{\triangle_{i_1,\ldots,i_l}}(\varphi,\triangle_{i_1,\ldots,i_l}))\|_C \le \\ \le A(1+\ln r)^l(\mathrm{mes}\,\triangle_{i_1,\ldots,i_l})^{r/l-1/p}\|\varphi\|_{L_p^r(\triangle_{i_1,\ldots,i_l})} \le \\ \le A(\mathrm{mes}\,\triangle_{i_1,\ldots,i_l})^{r/l-1/p}\|\varphi\|_{L_p^r(\triangle)} = Ah^{r-l/p}\psi_{i_1,\ldots,i_l},\end{gathered}$$

где $h = 2/n, \psi_{i_1,\ldots,i_l} = \|\varphi\|_{L_p^r(\triangle_{i_1,\ldots,i_l})}$, $P_{\triangle_{i_1,\ldots,i_l}}(\varphi,\triangle_{i_1,\ldots,i_l})-$ линейный оператор, введенный в разделе 3 главы 1.

Пусть $\psi_{i_1,\ldots,i_l} = m_{i_1,\ldots,i_l}h^{l/p}$. Рассмотрим две возможности:

$$1)\ m_{i_1,\ldots,i_l} \le 1;\ \ 2)\ m_{i_1,\ldots,i_l} > 1.$$

В первом случае погрешность восстановления оценивается неравенством

$$\|\varphi - \varphi_r(t_1,\ldots,t_l,\triangle_{i_1,\ldots,i_l}\|_C \le Ah^r \le An^{-r}.$$

Во втором случае каждое ребро куба $\triangle_{i_1,\ldots,i_l}$ разбивается на $n_{i_1,\ldots,i_l} =$
$= \left[m_{i_1,\ldots,i_l}^{p/(rp-l)}\right]$ равных частей. Из точек деления проводятся плоскости, перпендикулярные к ребрам, и в результате куб $\triangle_{i_1,\ldots,i_l}$ разбивается на $n^l_{i_1,\ldots,i_l}$ мелких кубов. Кубы, полученные в результате такого разбиения, обозначим $\triangle_{i_1,\ldots,i_l;j_1,\ldots,j_l}$. Функция $\varphi(t_1,\ldots,t_l)$ в кубе

$\triangle_{i_1,\dots,i_l;j_1,\dots,j_l}$ восстанавливается интерполяционным полиномом

$$\varphi_r(t_1,\dots,t_l;\triangle_{i_1,\dots,i_l;j_1,\dots,j_l}).$$

Нетрудно видеть, что погрешность такого восстановления равна $Ah^r =$
$= An^{-r}$.

Покажем, что число добавленных кубов не превосходит An^l. Прежде всего отметим, что

$$\sum_{i_1,\dots,i_l} m^p_{i_1,\dots,i_l} h^l = \sum_{i_1,\dots,i_l} \|\varphi\|^p_{L^r_p(\triangle_{i_1,\dots,i_l})} = \|\varphi\|^p_{L^r_p(\Omega)} \le M.$$

Воспользовавшись неравенством Гельдера с $v = l/(rp-l)$ и $v' =$ $= l/(2l-rp)$, полагая, что $rp > 2l$, имеем:

$$M \ge \sum_{i_1,\dots,i_l} m^p_{i_1,\dots,i_l} h^l \ge$$

$$\ge \left(\sum_{i_1,\dots,i_l} m^{lp/(rp-l)}_{i_1,\dots,i_l}\right)^{(rp-l)/l} \left(\sum_{i_1,\dots,i_l} h^{l^2/(2l-rp)}\right)^{(2l-rp)/l} \ge$$

$$\ge A\left(\sum_{i_1,\dots,i_l} n^l_{i_1,\dots,i_l}\right)^{(rp-l)/l} n^{-(rp-l)}.$$

Отсюда

$$\sum_{i_1,\dots,i_l} n^l_{i_1,\dots,i_l} \le An^l.$$

Таким образом, построен алгоритм восстановления функции $\varphi(t_1,\dots,t_l)$, использующий An^l значений функции φ и имеющий точность An^{-r}.

Теорема 3.1. Пусть $pr > 2l$, $p \ge 1$, $\varphi \in W^r_p(\Omega)$. Существует адаптивный алгоритм, использующий $N = n^l$ значений функции $\varphi(t_1,\dots,t_l)$ и восстанавливающий ее с точностью $AN^{-r/l}$.

Исследуем теперь адаптивные алгоритмы восстановления функций из класса $W^r_p(\Omega)$ в пространстве $L_q(\Omega)$, $1 \le q < \infty$.

Разделим i-ю ($i = 1,2,\dots,l$) сторону куба Ω на n частей точками $t^i_k = -1 + 2k/n, k = 0,1,\dots,n, i = 1,2,\dots,l$. В результате разбиения Ω образуются кубы $\Delta_{i_1,\dots,i_l}$. В кубах $\Delta_{i_1,\dots,i_l}$ аппроксимацию функции $\psi(t_1,\dots,t_l)$ будем осуществлять интерполяционным полиномом $\psi_r(t_1,\dots,t_l;\Delta_{i_1,\dots,i_l})$. Воспользовавшись леммой 3.5 из главы 1 убеждаемся в следующем:

$$\|\psi(t_1,\dots,t_l) - \psi_r(t_1,\dots,t_l;\Delta_{i_1,\dots,i_l})\|_{L_q} \le$$

$$\leq Ah^{r+l/q-l/p}\|\psi\|_{L_p^r(\Delta_{i_1,\dots,i_l})} = Ah^{r+l/q-l/p}\psi_{i_1,\dots,i_l},$$

где $\psi_{i_1,\dots,i_l} = \|\psi\|_{L_p^r(\Delta_{i_1,\dots,i_l})}$.

Пусть $\psi_{i_1\dots i_l} = m_{i_1\dots i_l}h^{l/p}$. Рассмотрим две возможности: 1) $m_{i_1\dots i_l} \leq 1$; 2) $m_{i_1\dots i_l} > 1$.

В первом случае погрешность восстановления оценивается неравенством

$$\|\psi - \psi_r(t, \Delta_{i_1,\dots,i_l})\|_{L_q} \leq Ah^{r+l/q} \leq An^{-r-l/q}.$$

Во втором случае каждое ребро куба $\Delta_{i_1,\dots,i_l}$ разбивается на

$$n_{i_1\dots i_l} = [m_{i_1\dots,i_l}^{pq/(rpq+l/p-l/q)}]$$

равных частей. Из точек деления проводятся плоскости, перпендикулярные к ребрам, и в результате куб $\Delta_{i_1,\dots,i_l}$ разбивается на $n_{i_1\dots i_l}^l$ более мелких кубов, которые обозначим через $\Delta_{i_1\dots i_l;j_1\dots j_l}$. Функция $\psi(t_1,\dots,t_l)$ в кубе $\Delta_{i_1\dots i_l;j_1\dots j_l}$ восстанавливается интерполяционным полиномом $\psi_r(t_1,\dots,t_l;\Delta_{i_1,\dots,i_l;j_1\dots j_l})$. Нетрудно видеть, что погрешность такого восстановления равна $An^{-r-l/q}$.

Покажем, что число добавленных кубов не превосходит An^l. Прежде всего отметим, что, как и в случае, когда $q=\infty$,

$$\sum_{i_1,\dots,i_l} m_{i_1\dots i_l}^p h^l \leq M.$$

Воспользовавшись неравенством Гельдера с $v = ql/(rpq+lp-lq)$ и $v' = ql(2lq-lp-rpq)$, полагая, что $rpq+lp-2lq > 0$, имеем:

$$M \geq \sum_{i_1\dots i_l} m_{i_1\dots i_l}^p h^l \geq$$

$$\geq \left(\sum_{i_1\dots i_l}\left(m_{i_1\dots i_l}^{lpq/(rpq+lp-lq)}\right)\right)^{(rpq+lq-lp)/ql}\left(\sum_{i_1\dots i_l} h^{l^2q/(2lq-lp-rpq)}\right)^{(2lq-lp-rpq)/ql} \geq$$

$$\geq An^{-(rpq+lp-lq)/q}\left(\sum_{i_1\dots i_l}\left(m_{i_1\dots i_l}^{lpq/(rpq+lp-lq)}\right)\right)^{(rpq+lp-lq)/ql}.$$

Отсюда следует, что

$$\sum_{i_1\dots i_l} n_{i_1\dots i_l}^l = \sum_{i_1\dots i_l} m_{i_1,\dots,i_l}^{lpq/(rpq+lp-lq)} \leq An^l.$$

Таким образом, построен адаптивный алгоритм восстановления функции $\psi(t_1,\dots,t_l)$, использующий при своем построении An^l значений функции ψ и имеющий точность $An^{-r-l/q}$.

Теорема 3.2. Пусть $rp \le l, lp > q(2l - rp), \psi \in W_p^r(\Omega)$. Существует адаптивный алгоритм, использующий $N = n^l$ значений функции
$\psi(t_1, \dots, t_l)$ и восстанавливающий ее с точностью $AN^{-r/l-1/q}$.

4. Адаптивные алгоритмы восстановления функций на классе $\mathbf{Q_{r,\gamma,p}([-1,1]^l, M), l \ge 2}$

Теорема 4.1. Пусть $f(x) \in Q_{r,\gamma,p}(\Omega),\ \Omega = [-1,1]^l, l \ge 2, v = s/(s-\gamma), s > 2l/p$. Существует адаптивный алгоритм, использующий значения функций $f(x)$ *в* n узлах и имеющий в метрике пространства L_∞ погрешность R_N :

$$R_N \le A \begin{cases} n^{-s/l} & \text{при } v < l/(l-1), w < 1, \\ n^{-s/l} & \text{при } v < l/(l-1), w = 1, v_1 < l, \\ (\ln n/n)^{s/l} & \text{при } v < l/(l-1), w = 1, v_1 = l, \\ (\ln n/n)^{(s-\gamma)/(l-1+l/(sp-l))} & \text{при } v < l/(l-1), w = 1, v_1 > l, \\ n^{-(s-\gamma)/(l-1+l/(sp-l))} & \text{при } v \ge l/(l-1), w > 1, \\ n^{-(s-\gamma)/(l-1+l/(sp-l))} & \text{при } v < l/(l-1), w > 1, v_1 \ge l, \\ n^{-s/l} & \text{при } v < l/(l-1), w > 1, v_1 < l, \end{cases}$$

где $w = (v-1)(lsp - sp + 2l - l^2)/(sp - 2l), v_l = v(l - 1 + l/(sp - l))$.

Из сравнения этих оценок с оценками поперечников Колмогорова и Бабенко компактов $Q_{r,\gamma,p}(\Omega, M)$, полученнными во второй главе, следует, что в ряде случаев, (например, при $p > 2$) адаптивные алгоритмы значительно точнее пассивных.

Доказательство теоремы 4.1. Обозначим через $\Delta_k(k = 0, 1, \dots,$
$N-1)$ множество точек $x = (x_1, \dots, x_l)$ из Ω, расстояние от которых до границы Γ области Ω удовлетворят неравенству

$$\left(\frac{k}{N}\right)^v \le d(x, \Gamma) \le \left(\frac{k+1}{N}\right)^v,$$

где $v = s/r$.

В каждой из областей Δ_k разместим кубы $\Delta^k_{i_1,\dots,i_l}$ со сторонами, длины которых равны $h_k = ((k+1)/N)^v - (k/N)^v$. То обстоятельство, что в каждом из множеств Δ_k может оказаться 2^l параллелепипедов, у которых не все стороны имеют длину, равную h_k, не влияет на дальнейшие рассуждения.

Обозначим через $P_s(x_1, \dots, x_l; \Delta^k_{i_1\dots i_l})$ интерполяционный полином, введенный в предыдущем разделе.

Аппроксимируем функцию $f(x)$ в кубах $\Delta^0_{i_1,\dots,i_l}$ полиномом $f_\beta(x,\Delta^0_{i_1\dots i_l})$, где $\beta = r-1$ при γ целом, $\beta = r$ при γ нецелом. Нетрудно видеть, что

$$\left|f(x) - f_\beta(x,\Delta^0_{i_1,\dots,i_l})\right| \le Ah_0^{r+\zeta} \le AN^{-s}.$$

Приступим к аппроксимации функции $f(x)$ в кубах $\Delta^k_{i_1,\dots,i_l}$ при $k>0$. Для этого воспользуемся леммой 3.4 из главы 1. Имеем

$$\|f - P_s(f,\Delta^k_{i_1\dots i_l})\| \le Ah_k^{l(s/l-1/p)}\|f\|_{L^s_p(\Delta_{i_1\dots i_l})} \le$$

$$\le Ah_k^{(sp-l)/p}\|f\|_{L^s_p(\Delta_{i_1\dots i_l})} = Ah_k^{(sp-l)/p} f(\Delta^k_{i_1\dots i_l}),$$

где $f(\Delta^k_{i_1\dots i_l}) = \|f\|_{L^s_p(\Delta_{i_1\dots i_l})}$.

Пусть $f(\Delta^k_{i_1\dots i_l}) = m^k_{i_1\dots i_l} h_k^{l/p}(N/(k+1))^{v\gamma}$. Рассмотрим две возможности: 1)$m^k_{i_1\dots i_l} \le 1$; 2)$m^k_{i_1\dots i_l} > 1$.

В первом случае

$$\left|f - P_s(f,\Delta^k_{i_1\dots i_l})\right| \le Ah_k^s(N/(k+1))^{v\gamma} \le AN^{-s}.$$

Перейдем ко второму случаю. Разделим каждую из сторон куба $\Delta^k_{i_1\dots i_l}$ на $n^k_{i_1\dots i_l} = [(m^k_{i_1\dots i_l})^{p/(sp-l)}]$ равных частей. Тогда погрешность аппроксимации в каждом кубе, полученном в результате разбиения, не превосходит величины

$$A\left(\frac{h_k}{n^k_{i_1\dots i_l}}\right)^{(sp-l)/p} m^k_{i_1\dots i_l} h_k^{l/p}\left(\frac{N}{k+1}\right)^{v\gamma} \le AN^{-s}.$$

Оценим величину $\sum\limits_k \sum\limits_{i_1\dots i_l} n^k_{i_1\dots i_l}$, полагая, что в кубах, в которых $m^k_{i_1\dots i_l} \le 1$, величина $n^k_{i_1\dots i_l}$ равна единице.

Нетрудно видеть, что

$$\sum_{k=0}^{N-1}\sum_{i_1\dots i_l}(m^k_{i_1\dots i_l})^p h_k^l = \sum_{k=0}^{N-1}\sum_{i_1\dots i_l}(f(\Delta^k_{i_1\dots i_l}))^p((k+1)/N)^{pv\gamma} =$$

$$= \sum_{k=0}^{N-1}\sum_{i_1\dots i_l}\left(\frac{k+1}{N}\right)^{pv\gamma}\sum_{|\alpha|=s}\int\dots\int\limits_{\Delta^k_{i_1\dots i_l}}|D^\alpha f|^p\,dx \le$$

$$\le 2\sum_{k=0}^{N-1}\sum_{i_1\dots i_l}\sum_{|\alpha|=s}\int\dots\int\limits_{\Delta^k_{i_1\dots i_l}}|d^\gamma(x,\Gamma)D^\alpha(f)|^p\,dx \le 2.$$

Воспользовавшись неравенством Гельдера с показателями $q = l/(sp -$
$-l)$ и $q' = l/(2l - sp)$ при $sp > 2l$, имеем:

$$2 \geq \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{i_1 \dots i_l} (m^k_{i_1 \dots i_l})^p h^l_k \geq$$

$$\geq \sum_{k=0}^{N-1} h^l_k \left(\sum_{i_1 \dots i_l} (m^k_{i_1 \dots i_l})^{pl/(sp-l)} \right)^{(sp-l)/l} \left(\sum_{i_1 \dots i_l} 1 \right)^{(2l-sp)/l} =$$

$$= \sum_{k=0}^{N-1} h^l_k n_k^{(2l-sp)/l} \left(\sum_{i_1 \dots i_l} (m^k_{i_1 \dots i_l})^{pl/(sp-l)} \right)^{(sp-l)/l} \geq$$

$$\geq \left(\sum_{k=0}^{N-1} \sum_{i_1 \dots i_l} (m^k_{i_1 \dots i_l})^{pl/sp-l)} \right)^{(sp-l)/l} \times$$

$$\times \left(\sum_{k=0}^{N-1} (h^l_k n_k^{(2l-sp)/l})^{l/(2l-sp)} \right)^{(2l-sp)/l},$$

где $n_k Д$ число кубов $\Delta^k_{i_1,\dots,i_l}$, размещенных в Δ_k.

Оценим сумму

$$\left(\sum_{k=0}^{N-1} \left(h^l_k n_k^{(2l-sp)/l} \right)^{l/(2l-sp)} \right)^{(2l-sp)/l} = \left(\sum_{k=0}^{N-1} h_k^{l^2/(2l-sp)} n_k \right)^{(2l-sp)/l} \geq$$

$$\geq A \left(\sum_{k=0}^{N-1} \frac{N^{vl^2/(sp-2l)}}{k^{(v-1)l^2/(sp-2l)}} \left(\frac{N^v - k^v}{k^{v-1}} \right)^{l-1} \right)^{(2l-sp)/l} \geq$$

$$\geq A \begin{cases} N^{-v(sp(l-1)+2l-l^2)/l} & \text{при } w > 1, \\ N^{-v(sp(l-1)+2l-l^2)/l} (\ln N)^{(2l-sp)/l} & \text{при } w = 1, \\ N^{-(sp-1)} & \text{при } w < 1, \end{cases}$$

где $w = (v-1)(lsp - sp + 2l - l^2)/(sp - 2l)$.

Обозначим через n^* число кубов, которые необходимо добавить к первоначальному разбиению области Ω при реализации описанного алгоритма.

Очевидно,

$$n^* \leq A \begin{cases} N^{v(l-1+l/(sp-l))} & \text{при } w > 1, \\ N^{v(l-1+l/(sp-l))} \ln N & \text{при } w = 1, \\ N^l & \text{при } w < 1. \end{cases}$$

Таким образом, определено число кубов n^*, которое необходимо добавить к начальному разбиению $\Delta_{i_1\ldots i_l}$ для достижения точности AN^{-s}.

Число же кубов $\Delta_{i_1\ldots i_l}$ первоначального разбиения оценивается соотношением

$$n^0 \asymp \begin{cases} N^{v(l-1)} & \text{при } v > l/(l-1), \\ N^l & \text{при } v < l/(l-1), \\ N^l \ln N & \text{при } v = l/(l-1), \end{cases}$$

установленным выше в главе 2.

Оценим точность восстановления при различных значениях w. Пусть $w \le 1$. Нетрудно видеть, что $w = (v-1)(l-1+l^2/(sp-2l))$ и, следовательно, если $w \le 1$, то $v < l/(l-1)$.

Таким образом, необходимо рассмотреть два случая: $w < 1$ при $v < l/(l-1)$ и $w = 1$ при $v < l/(l-1)$. В первом случае погрешность аппроксимации в каждом кубе не превышает AN^{-s}, а число функционалов, используемых при построении алгоритма, равно $n = n^* + n^0 = AN^l$.

Следовательно, погрешность построенного алгоритма при $v < l/(l-$ $-1)$ и $w < 1$ равна $An^{-s/l}$.

Во втором случае погрешность аппроксимации в каждом кубе не превосходит AN^{-s}, а число функционалов, используемых при пострении алгоритма, равно $n = AN^{v_1} \ln N$ при $v_1 = v(l-1+l/(sp-$ $l)) >$ $> l, n = AN^l \ln N$ при $v_1 = l$ и $n = AN^l$ при $v_l < l$. Следовательно, погрешность построенного алгоритма при $v < l/(l-1)$ и $w = 1$ равна $An^{-s/l}$, если $v_1 < l$; $A(\ln n/n)^{s/l}$, если $v_1 = l$ и $A((\ln n)/n)^{(s-\gamma)/(l-1/(sp-l))}$, если $v_1 > l$.

Пусть $w > 1$. Рассмотрим вначале случай, когда $v > l/(l-1)$. Число узлов, которое необходимо добавить для достижения точности AN^{-s}, равно $AN^{v(l-1+l/(sp-l))}$ и превосходит число узлов $AN^{v(l-1)}$ первоначального разбиения. Таким образом, общее число используемых функционалов равно $n = n^* + n^0 = AN^{v(l-1+l/(sp-l))}$. Следовательно, точность, построенного алгоритма при $v > l/(l-$ $1)$, равна $An^{-(s-\gamma)/(l-1+l/(sp-l))}$. Аналогичная оценка справедлива при $v =$ $= l/(l-1)$.

Рассмотрим теперь случай, когда $v < l/(l-1)$. Число функционалов, при котором достигается точность AN^{-s} в каждом кубе разбиения, равно $AN^{v(l-1+l/(sp-l))}$ при $v(l-1+l/(sp-l)) \ge l$ и AN^l

при $v(l-1+l/(sp-l))<l$. Следовательно, точность построенного алгоритма $An^{-(s-\gamma)/(l-1+l/(sp-l))}$ при $v(l-1+l/(sp-l))\ge l$ и $AN^{-s/l}$ при $v(l-1+l/(sp-l))<l$.

Теорема доказана.

Рассмотрим несколько случаев, когда описанный выше алгоритм может быть практически реализован.

Пусть все производные s-го порядка в кубе Ω неотрицательны, а $p=1$. В этом случае величина $\varphi(\Delta^k_{i_1,\dots,i_l})$ равна

$$\varphi(\Delta^k_{i_1,\dots,i_l})=\sum_{|v|=s}\int\limits_{\Delta^k_{i_1,\dots,i_l}}\frac{\partial^{|v|}\varphi(x_1,\dots,x_l)}{\partial x_1^{v_1}\dots\partial x_l^{v_l}}dx_1\dots x_l$$

и может быть выражена через значения частных производных в вершинах куба $\Delta^k_{i_1,\dots,i_l}$.

Для простоты ограничимся случаем функций двух переменных.

Оценим значение суммы

$$\sum_{|v|=s}\int\limits_{\Delta^k_{i_1,i_2}}\int\frac{\partial^{|v|}\varphi(x_1,x_2)}{\partial x_1^{v_1}\partial x_2^{v_2}}dx_1dx_2.$$

Для смешанных производных интеграл вычисляется точно

$$\int\limits_{\Delta^k_{i_1,i_2}}\int\frac{\partial^{|v|}\varphi(x_1,x_2)}{\partial x_1^{v_1}\partial x_2^{v_2}}dx_1dx_2=$$

$$=\varphi^{(v_1-1,v_2-1)}(a^k_{i_1+1},a^k_{i_2+1})-\varphi^{(v_1-1,v_2-1)}(a^k_{i_1+1},a^k_{i_2})-$$
$$-\varphi^{(v_1-1,v_2-1)}(a^k_{i_1},a^k_{i_2+1})+\varphi^{(v_1-1,v_2-1)}(a^k_{i_1},a^k_{i_2}). \qquad (4.1)$$

Для остальных производных оценка интеграла выглядит более сложной.

Рассмотрим интеграл

$$\int\limits_{\Delta^k_{i_1,i_2}}\int\frac{\partial^{s}\varphi(x_1,x_2)}{\partial x_1^{s}}dx_1dx_2=$$

$$=\int\limits_{a^k_{i_2}}^{a^k_{i_2+1}}\left[\left(\varphi^{(s-1,0)}(a^k_{i_1+1},x_2)-\varphi^{(s-1,0)}(a^k_{i_1+1},a^k_{i_2})\right)\right]dx_2-$$

$$
-\int\limits_{a^k_{i_2}}^{a^k_{i_2+1}} \left[\left(\varphi^{(s-1,0)}(a^k_{i_1},x_2)-\varphi^{(s-1,0)}(a^k_{i_1},a^k_{i_2})\right)\right] dx_2+
$$

$$
+\left(\varphi^{(s-1,0)}(a^k_{i_1+1},a^k_{i_2})-\varphi^{(s-1,0)}(a^k_{i_1},a^k_{i_2})\right) h_k \leq
$$

$$
\leq \int\limits_{a^k_{i_2}}^{a^k_{i_2+1}} \int\limits_{a^k_{i_2}}^{x_2} \varphi^{(s-1,1)}(a^k_{i_1+1},u)dudx_2 - \int\limits_{a^k_{i_2}}^{a^k_{i_2+1}} \int\limits_{a^k_{i_2}}^{x_2} \varphi^{(s-1,1)}(a^k_{i_1+1},u)dudx_2+
$$

$$
+\left(\varphi^{(s-1,0)}(a^k_{i_1+1},a^k_{i_2})-\varphi^{(s-1,0)}(a^k_{i_1},a^k_{i_2})\right) h_k \leq
$$

$$
\leq \int\limits_{a^k_{i_2}}^{a^k_{i_2+1}} \int\limits_{a^k_{i_2}}^{a^k_{i_2+1}} \varphi^{(s-1,1)}(a^k_{i_1+1},u)dudx_2+
$$

$$
+\left(\varphi^{(s-1,0)}(a^k_{i_1+1},a^k_{i_2})-\varphi^{(s-1,0)}(a^k_{i_1},a^k_{i_2})\right) h_k =
$$

$$
=\left(\varphi^{(s-1,0)}(a^k_{i_1+1},a^k_{i_2+1})-\varphi^{(s-1,0)}(a^k_{i_1+1},a^k_{i_2})\right. +
$$

$$
\left.+\,\varphi^{(s-1,0)}(a^k_{i_1+1},a^k_{i_2})-\varphi^{(s-1,0)}(a^k_{i_1},a^k_{i_2})\right) h_k =
$$

$$
=\left(\varphi^{(s-1,0)}(a^k_{i_1+1},a^k_{i_2+1})-\varphi^{(s-1,0)}(a^k_{i_1},a^k_{i_2})\right) h_k. \tag{4.2}
$$

Оценив по формулам (4.1), (4.2) величину $\varphi(\Delta^k_{i_1,i_2})$, из соотношения $\varphi(\Delta^k_{i_1,i_2}) = m^k_{i_1,i_2} h^2_k (N/(k+1))^{v\gamma}$ находим $m^k_{i_1,i_2}$ и, следовательно, $n^k_{i_1,i_2}$.

Глава 6

КВАДРАТУРНЫЕ ФОРМУЛЫ

1. Интегралы со степенными особенностями

Рассмотрим квадратурную формулу (к.ф.)

$$I\varphi \equiv \int_0^1 \rho(t)\varphi(t)dt = \sum_{k=1}^{N} \sum_{j=0}^{\rho_k} p_{kj}\varphi^{(j)}(t_k) + R_N(p_{kj}, t_k, \varphi). \qquad (1.1)$$

Наилучшая к.ф. вида (1.1) при $N = 2$, $\rho(t)dt = dq(t)$, $t_1 = 0$, $t_N = 1$ построена в работе [56] на множестве функций $W^r L_2(1)$. Наилучшая к.ф. вида (1.1) при произвольной суммируемой весовой функции $\rho(t)$ при $\rho_k = 0$ $(k = 1, \dots, N)$ была построена [1] на множестве функций $W_0^1 L_2(1)$.

В случае, когда вес $\rho(t) = t$, наилучшие к.ф. с фиксированными узлами при $\rho_k = 2r - 1$ были построены на множествах функций $W_{01}^{2r}(1)$ и $W^{2r} L_2(1)$ в работах [55, 57]. При произвольной суммируемой функции и фиксированных узлах наилучшая к.ф. при $\rho_k = r-1$ на множестве функций $W_0^r L_\infty(1)$ построена в [57]. Интересные результаты по вычислению интегралов с весовыми функциями получены в [53, 54] .

При весовой функции $\rho(t) = t^\alpha$ наилучшие к.ф. вида (1.1) при $\rho_k = r - 1$, $\rho_k = r - 2$, $k = 1, 2, \dots, N$, на множествах функций $W^r L_2(1)$, $W^r L_\infty(1)$ построены в работах [5, 6].

В работе [70] вычислена сильная асимптотика погрешности к.ф. вида (1.1) при $\rho_k = 0$ $(k = 1, 2, \dots, N)$ на классе функций $W^r L_p(1)(1 \le$
$\le p \le \infty)$ в предположении, что $\|\varphi(t)\|_{L_q} < \infty$, где $1/p + 1/q = 1$.

В работе [17] построены оптимальные, асимптотически оптимальные и оптимальные по порядку к.ф. вида (1.1) на различных классах функций в предположении , что $\rho(t) = t^{-\gamma}$, $0 \le \gamma < 1$.

Данный раздел посвящен оптимальным алгоритмам вычисления интегралов со степенными особенностями.

На протяжении всего параграфа полагаем $\rho(t) = t^{-\gamma}$, $0 \le \gamma < 1$.

Теорема 1.1. Среди всевозможных к.ф. вида (1.1) (при $\rho_k = 0$) асимптотически оптимальной на классе $H_\alpha(1)$ является формула

$$I\varphi = (1-\gamma)^{-1} \sum_{k=0}^{N-1} \varphi(t'_k) \left(t_{k+1}^{1-\gamma} - t_k^{1-\gamma}\right) + R_N(\varphi),$$

где $t_k = (k/N)^{(1+\alpha)/(1+\alpha-\gamma)}$, $t_l' = (t_l + t_{l+1})/2$, $k = 0, 1, \ldots, N$, $l = 0, 1, \ldots,$
$N-1$. Ее погрешность равна

$$R_N[H_\alpha(1)] = (1+\alpha)^\alpha / 2^\alpha (1+\alpha-\gamma)^{1+\alpha} N^\alpha + o\left(N^{-1}\right).$$

Теорема 1.2. На классе функций $W_0^1 L(1)$ среди всевозможных к.ф. вида (1.1) при $\rho_k = 0$ и $t_N = 1$ формула

$$I\varphi = N^{-1}(1-\gamma)^{-1}\left[\sum_{k=1}^{N-1}\varphi(t_k) + \frac{1}{2}\varphi(t_N)\right] + R_N(\varphi),$$

где $t_k = (k/N)^{1/(1-\gamma)}$, $k = 1, 2, \ldots, N$, является оптимальной. Ее погрешность равна $1/2N(1-\gamma)$.

Теорема 1.3. На классе функций $W_0^1 L(1)$ среди всевозможных к.ф. вида (1.1) при $\rho = 0$ оптимальной является формула

$$I\varphi = 2(1-\gamma)^{-1}(2N+1)^{-1}\sum_{k=1}^{N-1}\varphi(t_k) + R_N(\varphi),$$

где $t_k = (2k/(2N+1))^{1/(1-\gamma)}$, $k = 0, 1, \ldots, N$. Ее погрешность равна $R_N[W_0^1 L(1)] = 1/(2N+1)(1-\gamma)$.

Доказательства теорем 1.1 − 1.3 приведены в монографии [17].

Построим асимптотически оптимальные к.ф. на классе $W^r L_p(1)$, $r = 1, 2, \ldots,$ $1 \le p \le \infty$.

Обозначим через v величину $v = (rq+1)/(rq+1-q\gamma)$. Введем узлы $t_k = (k/N)^v$, $k = 0, 1, \ldots, N$. На каждом сегменте $\triangle_k = [t_k, t_{k+1}]$, $k =$
$= 0, 1, \ldots, N-1$, подынтегральную функцию $\varphi(t)$ аппроксимируем полиномом $\tilde{\varphi}(t, \triangle_k)$, который определяется формулой

$$\tilde{\varphi}(t, \triangle_k) = \sum_{l=0}^{r-1}\left(\frac{\varphi^{(l)}(t_k)}{l!}(t-t_k)^l + B_{kl}\delta^{(l)}(t_{k+1})\right),$$

$$\delta(t) = \varphi(t) - \sum_{l=0}^{r-1}\frac{\varphi^{(l)}(t_k)}{l!}(t-t_k)^l,$$

коэффициенты $\{B_{kl}\}$ которой определяются из равенства

$$(t_{k+1}-t_k)^r - \sum_{l=0}^{r-1}\frac{B_{kl} r!(t_{k+1}-t_k)}{(r-l-1)!}(t_{k+1}-t)^{r-l-1} =$$

$$= (-1)^r R_{rq}\left(\frac{t_k + t_{k+1}}{2}, \frac{t_{k+1}-t_k}{2}, t\right).$$

Введем квадратурную формулу

$$I\varphi = \sum_{k=1}^{N-1} \int_{t_k}^{t_{k+1}} \frac{\tilde{\varphi}(\tau, \triangle_k)dt}{\tau^{\gamma}} + \sum_{k=0}^{r-1} \frac{\varphi^{(k)}(0)}{k!(k+1-\gamma)} t_1^{k+1-\gamma} + R_N(\varphi). \quad (1.2)$$

Теорема 1.4. Среди всевозможных к.ф. вида (1.1) при $\rho = r - 1$ асимптотически оптимальной на классе $W^r L_p(1)(1 \le p \le \infty)$ является формула(1.2). Ее погрешность равна

$$R_N[W^r L_p(1)] = \frac{R_{rq}(1)}{2^r (rq+1)^{1/q} r! N^r} \left(\frac{qr+1}{qr+1-q\gamma}\right)^{r+1/q} + o(N^{-r}).$$

Доказательство. Теорема является обобщением теоремы 5.1.5 монографии [17], причем в [17] установлена оценка снизу верхней грани погрешностей к.ф. вида (1.1) на классе $W^r L_p(1)$ при $1 \le q \le$ $\le 1/(1-\gamma),\ 1/p + 1/q = 1$, и оценена погрешность к.ф.(1.2) на классе $W^r L_p(1)$ при $1 \le p \le \infty$. Таким образом, для доказательства справедливости теоремы 1.4 достаточно распространить оценку снизу на весь класс $W^r L_p(1), 1 \le p \le \infty$.

Введем обозначения $s_k = (k/l)^v$, $k = 0, 1, \ldots, l$, где $l = [N/M]$, $M =$
$= [\ln N]$.

Пусть $\varphi^*(t)-$ функция, обращающаяся в нуль вместе со своими производными до $(r-1)$-го порядка включительно в узлах к.ф. (1.1) и в точках $s_k (k = 0, 1, \ldots, l)$ и такая, что $\int\limits_{s_k}^{s_{k+1}} \varphi^*(\tau)d\tau > 0$ при $1 \le$
$\le k \le l-1$. Кроме того, предположим, что $\varphi^*(t) \equiv 0$ при $0 \le t \le s_1$ и $s_l \le t \le 1$. Тогда

$$\int_0^1 \frac{\varphi^*(\tau)}{\tau^{\gamma}} d\tau \ge \sum_{k=0}^{l-1} \left[s_{k+1}^{-1} \int_{s_k}^{s_{k+1}} \varphi^*(\tau)d\tau + \left(s_k^{-1} + s_{k+1}^{-1}\right) \int_{s_k}^{s_{k+1}} \varphi^{*-}(\tau)d\tau \right] = I_1 + I_2,$$

где

$$\varphi_k^-(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } \ \varphi_k(t) \ge 0, \\ \varphi_k(t) & \text{при } \varphi_k(t) < 0. \end{cases}$$

Из теорем 3.18, 3.19 и леммы Смоляка, приведенных в главе 1, следует, что:

$$\sup_{\varphi \in W^r L_p(M_k; [s_k, s_{k+1}]), \varphi^{(l)}(t_j) = 0, j = 1, 2, \ldots, N_k, l = 0, 1, \ldots, r-1} \left| \int_{s_k}^{s_{k+1}} \varphi(\tau)d\tau \right| \ge$$

$$\ge (s_{k+1} - s_k)^{r+l-1/p} M_k R_{rq}(1) / 2^r r! (rq+1)^{1/q} (N_k - 1 + [R_{rq}(1)]^{1/r})^r,$$

где N_k- число узлов к.ф. (1.1), расположенных в сегменте $[s_k, s_{k+1}]$.

Повторяя рассуждения, приведенные в [17, с. 47 – 48], можно показать, что:

$$I_1 \geq \frac{R_{rq}(1)}{2^r r!(rq+1)^{1/q} N^r} \left(\frac{rq+1}{rq+1-q}\right)^{r+1/q} + o\left(N^{-r}\right).$$

Перейдем к оценке I_2

$$|I_2| \leq \sum_{k=1}^{l-1} \left|\frac{1}{s_k^{\gamma}} - \frac{1}{s_{k+1}^{\gamma}}\right| \left|\int\limits_{s_k}^{s_{k+1}} \varphi^*(\tau) d\tau\right| \leq$$

$$\leq A \sum_{k=1}^{l-1} \frac{(s_{k+1}-s_k)^{r+1+1/q}}{s_k^{1+\gamma}} \left[\int\limits_{s_k}^{s_{k+1}} |\varphi^{*(r)}(t)|^p dt\right]^{1/p} \leq o(N^{-r}).$$

Из полученных оценок сумм I_1 и I_2 следует оценка снизу величины $\zeta_N[W^r L_p](1)$. Теорема доказана.

Построим асимптотически оптимальные к.ф., не использующие значений производных подынтегральных функций.

Введем обозначения $M = [\ln N]$, $L = [N/M]$.

Построим квадратурную формулу

$$I\varphi = \sum_{k=1}^{L-1} t_{k+1}^{*-\gamma} l_{M,r,p}(\varphi, [t_k^*, t_{k+1}^*]) + \int\limits_0^{t_1^*} \Pi_{N,r,p}(T_{r-1}(\varphi; [0, t_1^*], 0))\tau^{-\gamma} dt +$$

$$+ \sum_{k=1}^{L-1} \int\limits_{t_k^*}^{t_{k+1}^*} \Pi_{N,r,p}(T_{r-1}(\varphi; [t_k^*, t_{k+1}^*], t_k^*)) \left(\tau^{-\gamma} - t_{k+1}^{*-\gamma}\right) d\tau + R_N(\varphi), \quad (1.3)$$

где $t_k^* = (k/L)^v$, $k = 0, 1, \ldots, L$, $v = (rq+1)/(rq-\gamma q+1)$, операторы l и Π введены в третьем разделе первой главы.

Теорема 1.5. Среди всевозможных к.ф. вида (1.1) при $\rho_k = 0$ асимптотически оптимальной на классе функций $W^r L_p(1)$, $1 < p \leq \leq \infty$, является формула (1.3). Ее погрешность равна

$$R_N\left(W^r L_p(1)\right) = \frac{1+o(1)}{N^r} \left(\frac{rq+1}{rq-\gamma q+1}\right)^{r+1/q} \inf_c \|B_r^*(t) - c\|_{L_q},$$

где B_r^*-полином Бернулли, $1/p + 1/q = 1$.

Доказательство. Вначале оценим снизу величину $\zeta_N[W^r L_p(1)]$. Обозначим через $\{w_k\}$ объединение узлов $\{t_i\}$ к.ф. (1.1) и точек $\{t_k^*\}$. Обозначим через $\varphi^*(t)$ функцию, принадлежащую множеству $W^r L_p(1)$, равную нулю в точках w_k и обращающуюся в нуль вместе с производными r-го порядка в точках t_k^*, $k = 0, 1, \ldots, L$. Из теории квадратурных формул Эйлера – Маклорена и леммы С. А. Смоляка следует , что каждому сегменту $[t_k^*, t_{k+1}^*]$ можно поставить в соответствие функцию $\varphi_k^*(t)$, равную нулю в узлах $t_k \in [t_k^*, t_{k+1}^*]$ и обращающуюся в нуль вместе с производными до r-го порядка в точках t_k^*, t_{k+1}^*, причем

$$\int\limits_{t_k^*}^{t_{k+1}^*} \varphi_k^*(t)dt \geq M_k \inf_c \|B_r^*(t) - c\|_{L_q} (N_k)^{-r}.$$

Здесь $M_k = \left[\int\limits_{t_k^*}^{t_{k+1}^*} |\varphi_k^*(t)|^p dt\right]^{1/p}$, N_k- число узлов к.ф. (1.1), попавших на сегмент $[t_k^*, t_{k+1}^*]$.

Нетрудно видеть, что

$$\int\limits_0^1 \frac{\varphi^*(\tau)}{\tau^\gamma} d\tau = \sum_{k=1}^{L-1} \int\limits_{t_k^*}^{t_{k+1}^*} \varphi^*(\tau)\tau^{-\gamma} d\tau \geq \sum_{k=1}^{L-1} t_{k+1}^{*-\gamma} \int\limits_{t_k^*}^{t_{k+1}^*} \varphi^*(\tau)d\tau +$$

$$+ \sum_{k=1}^{L-1} (t_k^{*-\gamma} - t_{k+1}^{*-\gamma}) \int\limits_{t_k^*}^{t_{k+1}^*} \varphi^{*-}(\tau)d\tau = r_1 + r_2,$$

где

$$\varphi_k^+(t) = \begin{cases} \varphi_k(t) & \text{при} \quad \varphi_k(t) \geq 0, \\ 0 & \text{при} \quad \varphi_k(t) < 0, \end{cases}$$

$$\varphi_k^-(t) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad \varphi_k(t) \geq 0, \\ \varphi_k(t) & \text{при} \quad \varphi_k(t) < 0. \end{cases}$$

Оценим величины r_1 и r_2 :

$$r_1 \geq \sum_{k=1}^{L-1} t_{k+1}^{*-\gamma} \int\limits_{t_k^*}^{t_{k+1}^*} \varphi_k^*(t)dt \geq \frac{(1+o(1))}{N^r} \left(\frac{rq+1}{rq - \gamma q + 1}\right)^{r+1/q} \inf_c \|B_r^*(t) - c\|_{L_q},$$

$$|r_2| \leq \sum_{k=1}^{L-1} \left|t_k^{*-\gamma} - t_{k+1}^{*-\gamma}\right| \int\limits_{t_k^*}^{t_{k+1}^*} |\varphi_k^*| d\tau \leq$$

$$\leq \frac{1}{(r-1)!} \sum_{k=1}^{L-1} \left|t_k^{*-\gamma} - t_{k+1}^{*-\gamma}\right| \int\limits_{t_k^*}^{t_{k+1}^*} \left| \int\limits_{t_k^*}^{\tau} (\tau - v)^{r-1} \varphi^{*(r)}(v) dv \right| \leq$$

$$\leq \frac{A}{L^{r+1/q}} \sum_{k=1}^{L-1} \frac{1}{k} \left[\int\limits_{t_k^*}^{t_{k+1}^*} \left|\varphi^{*(r)}(v)\right|^p dv \right]^{1/p} \leq \frac{A}{L^{r+1/q}} = o(N^{-r}).$$

Из полученных оценок следует, что

$$\zeta_N[W^r L_p(1)] \geq (1+o(1)) \left(\frac{rq+1}{rq-\gamma q+1} \right)^{r+1/q} \frac{1}{N^r} \inf_c \|B_r^*(t)-c\|_q.$$

Оценим погрешность к.ф. (1.3). Нетрудно видеть, что

$$|R_N(\varphi)| \leq \left| \sum_{k=1}^{L-1} \int\limits_{t_k^*}^{t_{k+1}^*} \left(\varphi(\tau) - T_{r-1}(\varphi; [t_k^*, t_{k+1}^*]; t_k^*)\right) \left(\tau^{-\gamma} - t_{k+1}^{*-\gamma}\right) d\tau \right| +$$

$$+ \left| \int\limits_0^{t_1^*} \left(\varphi(\tau) - T_{r-1}(\varphi; [0, t_1^*]; 0)\right) \tau^{-\gamma} d\tau \right| + \left| \sum_{k=1}^{L-1} \int\limits_{t_k^*}^{t_{k+1}^*} \left(T_{r-1}(\varphi; [t_k^*, t_{k+1}^*]; t_k^*) - \right.\right.$$

$$\left.\left. - \prod_{N,r,p} (T_{r-1}(\varphi; [t_k^*, t_{k+1}^*]; t_k^*)) \right) (\tau^{-\gamma} - t_{k+1}^{*-\gamma}) d\tau \right| +$$

$$+ \left| \int\limits_0^{t_1^*} (T_{r-1}(\varphi; [0, t_1^*]; 0) - \prod_{N,r,p} (T_{r-1}(\varphi; [0, t_1^*]; 0)) \tau^{-\gamma} d\tau \right| +$$

$$+ \left| \sum_{k=1}^{L-1} \frac{1}{t_{k+1}^{*\gamma}} \int\limits_{t_k^*}^{t_{k+1}^*} \varphi(\tau) d\tau - l_{M,r,p}(\varphi; [t_k^*, t_{k+1}^*]) \right| = r_1 + \ldots + r_5.$$

Оценки $r_1 \leq o(N^{-r})$ и $r_2 \leq o(N^{-r})$ получаем из оценок точности формулы Тейлора с остаточным членом в интегральной форме и выбора точек t_k^*, $k = 0, 1, \ldots, M$.

Равенства $r_3 = o(N^{-r})$ и $r_4 = o(N^{-r})$ следуют из построения оператора $\prod\limits_{N,r,p}$.

Остановимся на оценке суммы r_5. В работе [70] показано, что при $1 < p \leq \infty$

$$\left| \int\limits_a^b \varphi(\tau) d\tau - l_{n,r,p}(\varphi; [a,b]) \right| \leq$$

$$\leq \frac{1+o(1)}{n^r} \inf_c \|B_r^*(t) - c\|_{L_q[0,1]} (b-a)^{r+1/q} \|\varphi^{(r)}\|_{L_p[a,b]}.$$

Следовательно,

$$r_5 \leq \frac{1+o(1)}{L^r} \inf_c \|B_r^*(t) - c\|_{L_q} \sum_{k=1}^{M-1} \left(\frac{M}{k+1}\right)^{v\gamma} \left(\left(\frac{k+1}{M}\right)^v - \left(\frac{k}{M}\right)^v\right)^{r+1/q} \times$$

$$\times \|\varphi^{(r)}\|_{L_q[t_k^*, t_{k+1}^*]} \leq \frac{1+o(1)}{N^r} \inf_c \|B_r^*(t) - c\|_{L_q} \left(\frac{rq+1}{rq-\gamma+1}\right)^{r+1/q}.$$

Собирая оценки $r_1 - r_5$, имеем:

$$R_N[W^r L_p(1)] = \frac{1+o(1)}{N^r} \left(\frac{rq+1}{rq-\gamma q+1}\right)^{r+1/q} \inf_c \|B_r^*(t) - c\|_{L_q}.$$

Теорема доказана.

Замечание. Оптимальные по порядку алгоритмы вычисления интегралов $I\varphi$ построены в монографии [17].

2. Асимптотически оптимальные квадратурные формулы на классах функций со степенным ростом производных у границы области

Рассмотрим к.ф. вида

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx = \sum_{k=-N}^{N}{}' \sum_{l=0}^{\rho} p_{kl} f^{(l)}(x_k) + R_N(f), \qquad (2.1)$$

где $\sum'$ означает суммирование по $k \neq 0,\ -1 \leq x_{-N} < \ldots < x_{-1} < 0 <$
$< x_1 < \ldots < x_N \leq 1$.

Наилучшие к.ф. вида (2.1) на классах функций $W^r L_p(1)$, начиная с работ С. М. Никольского [63], исследовались многими авторами (подробную библиографию см. в [64, 48, 40]).

Ниже строятся асимптотически оптимальные к.ф. вида (2.1) на классе функций $Q_{r,\gamma,p}(\Omega, M)$, который является обобщением класса $W^r L_p(1)$.

Теорема 2.1. Пусть $\Psi = Q_r(\Omega, 1)$, $\Omega = [-1, 1]$. Среди всевозможных к.ф. вида (2.1) при $\rho = 2r$ асимптотически оптимальной является формула

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx = \sum_{k=-N+1}^{N-1} \sum_{l=0}^{2r} p_{kl} f^{(l)}(v_k) + R_N(f),$$

определяемая следующим набором узлов и весов: $v_{\pm k} = \pm 1 \mp ((N - -k)/N)^2$, $k = -N, \dots, N$, $p_{kl} = \varphi^{(2r-1)}(v_k - 0) - \varphi^{(2r-1)}(v_k + 0)$, где

$$\varphi(x) = \begin{cases} (1+x)^{2r+1}/(2r+1)! & \text{при } -1 \le x \le v_{-N+1}, \\ R_{2r+1,1}(v_k^1, (v_{k+1} - v_k)/2, x) & \text{при } v_k \le x \le v_{k+1}, \\ k = -N+1, \dots, N-2, & \\ (1-x)^{2r+1}/(2r+1)! & \text{при } v_{N-1} \le x \le 1, \end{cases} \tag{2.2}$$

где $v_k^1 = (v_{k+1} + v_k)/2$.

Погрешность этой формулы равна

$$R_N[\Psi] = 4(1 + o(1)) R_{2r+1,1}(1)/((2r+1)(2r+1)! N^{2r+1}).$$

Доказательство. Известна [64, с. 150] формула

$$\int\limits_{-1}^{1} f(x)dx = \sum_{k=-N}^{N-1} \sum_{l=0}^{2r} (-1)^l f^{(l)}(x) \varphi^{(2r-1)}(x) \Big|_{v_k}^{v_{k+1}} -$$

$$- \frac{1}{(2r+1)!} \int\limits_{-1}^{1} f^{(2r+1)}(x) \varphi(x) dx.$$

Погрешность этой к.ф. равна

$$|R_N[f]| = \left| \frac{1}{(2r+1)!} \int\limits_{-1}^{1} f^{(2r+1)}(x) \varphi(x) dx \right| \le$$

$$\le \frac{1}{(2r+1)!} \int\limits_{-1}^{1} \left| f^{(2r+1)}(x) \right| |\varphi(x)| dx.$$

В книге [64, с. 156] показано, что

$$\int\limits_{v_k}^{v_{k+1}} \left| R_{r1}(v_k^1, (v_{k+1} - v_k)/2, x) \right| dx = \frac{2|R_{r1}(1)|}{r!} \left(\frac{v_{k+1} - v_k}{2} \right)^{r+1}. \tag{2.3}$$

Поэтому

$$R_N[\Psi] \le (1 + o(1)) 4 R_{2r+1,1}(1)/((2r+1)(2r+1)! N^{2r+1}). \tag{2.4}$$

Докажем, что эта оценка достижима в сильной асимптотике.

Пусть $M = [\ln N], L = [N/M]$. $\zeta_{\pm k} = \pm 1 \mp (k/L)^2, k = 0, 1, \dots, L$. Через w_k обозначим объединение узлов x_k к.ф. (2.1) и точек ζ_k. Введем функцию $\varphi^*(x) \in W^{2r+1}(1)$, обращающуюся в нуль вместе с производными до $2r$-го порядка в точках w_k, равную нулю на сегменте $[\zeta_{-L+1}, \zeta_{L-1}]$ и, кроме того, удовлетворяющую условиям:

$$\int\limits_{\zeta_{-k}}^{\zeta_{-k-1}} \varphi^*(x)dx \geq 0, k = 0, 1, \ldots, L-2;$$

$$\int\limits_{\zeta_k}^{\zeta_{k+1}} \varphi^*(x)dx \geq 0, k = 0, 1, 2, \ldots, L-2.$$

Построим функцию $\psi^*(x)$. При этом ограничимся сегментом $[-1, 0]$. На сегменте $[\zeta_{-k}, \zeta_{-k-1}]$ положим $\psi^*(x) = \varphi^*(x)/(1 + \zeta_{-k-1})^{r+1}$. Нетрудно видеть, что $\psi^*(x) \in Q_r(\Omega, 1)$.

Подставляя $\psi^*(x)$ в к.ф. (2.1), имеем:

$$\int\limits_{-1}^{1} \psi^*(x)dx \geq \sum_{k=1}^{L} (1+\zeta_{-k-1})^{-r-1} \left(\int\limits_{\zeta_{-k}}^{\zeta_{-k-1}} \psi^*(x)dx + \int\limits_{\zeta_k}^{\zeta_{k+1}} \psi^*(x)dx \right). \quad (2.5)$$

Известно (см. теорему 3.19 из главы 1), что

$$\inf_{p_{kl}} \sup_{\psi \in W^r(1)} \left| \int\limits_0^1 \psi(\tau)d\tau - \sum_{k=1}^{N} \sum_{l=0}^{r-1} p_{kl} \psi^{(l)}(t_k) \right| \geq \frac{1}{r![4(N-1) + 2(r+1)^{1/r}]^r}.$$

Из предыдущих неравенств, следствия леммы С. А. Смоляка и теоремы 3.18 главы 1 имеем:

$$\sup_{\psi \in W^r(1), \psi^{(j)}(w_i)=0, i=1,2,\ldots,N_k, j=0,1,\ldots,r-1} \int\limits_{\zeta_{-k}}^{\zeta_{-k-1}} \psi(\tau)d\tau \geq$$

$$\geq \frac{(\zeta_{-k-1} - \zeta_{-k})^{r+1}}{r! 4(N_k - 1) + 2(r+1)^{1/r}}, \quad (2.6)$$

где N_k– число узлов к.ф. (2.1) на сегменте $[\zeta_{-k}, \zeta_{-k-1}]$.

Из неравенств (2.5) и (2.6) следует неравенство

$$\int\limits_{-1}^{1} \psi^*(x)dx \geq (1 + o(1)) \frac{4R_{2r+1,1}(1)}{(2r+1)(2r+1)! N^{2r+1}}. \quad (2.7)$$

Из сопоставления оценок (2.4) и (2.7) следует теорема.

Построим асимптотически оптимальную к.ф. вида (2.1) при $\rho = 0$. Пусть $M = [\ln N], L = [N/M]$. Рассмотрим к.ф.

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx = \sum_{k=1}^{L-2} l_{M,s,\infty}(f;[v_k, v_{k+1}]) + \sum_{k=1}^{L-2} l_{M,s,\infty}(f;[v_{-k-1}; v_{-k}]) +$$

$$+l_{M,q,u}(f;[-1, v_{-L+1}]) + l_{M,q,u}(f;[v_{L-1}, 1]) + R_N(f), \tag{2.8}$$

где $v_k = 1-((L-k)/L)^v, v_{-k} = -1+((L-k)/L)^v, k = 0, 1, \ldots, L; v = (s+1)/(s+1-\gamma); q = r, u = \infty$ при γ целом; $q = r+1, u = p, p < 1/\mu$ при γ нецелом.

Замечание. При нецелом γ теорема справедлива при $\gamma < (s+1)\mu$.

Теорема 2.2. На классе $\Psi = Q_{r,\gamma}(\Omega, 1)$, $\Omega = [-1, 1]$, среди всевозможных к.ф. вида (2.1) при $\rho = 0$, $-1 < x_k < 1$, $k = -N, \ldots, N$, асимптотически оптимальной является формула (2.8). Ее погрешность равна

$$R_N[\Psi] = \frac{2+o(1)}{N^s} \left(\frac{s+1}{s+1-\gamma}\right)^{r+1} \inf_c \|B_s^*(t) - c\|_{L_1}.$$

Доказательство. Вначале оценим снизу величину $\zeta[\Psi]$. При этом сохраним обозначения $L, M, v_{\pm k} (k = 0, 1, \ldots, L)$, введенные при доказательстве предыдущей теоремы. Обозначим через $\varphi^*(x) \in W^{(s)}(1)$ функцию, равную нулю в узлах $\{x_k\}$ к.ф. (2.1) и обращающуюся в нуль вместе с производными до $(s-1)$-го порядка в точках $v_{\pm k}(k =$
$= 0, 1, \ldots, L)$, через $\varphi^*_{\pm k}(x)-$ сужение $\varphi^*(x)$ на $[v_k, v_{k+1}]$ при $k \geq 0$ и $[v_{-k-1}, v_{-k}]$ при $k \leq 0$. Определим функцию $\psi^*(x) \in Q_{r,\gamma}(\Omega, 1)$ формулой

$$\psi^*(x) = A \begin{cases} \varphi^*_k(x)/((k+1)/L)^v & \text{при } x \in [v_k, v_{k+1}], k \geq 0, \\ \varphi^*_{-k}(x)/((k+1)/L)^v & \text{при } x \in [v_{-k-1}, v_{-k}], k < 0. \end{cases}$$

Как и при доказательстве теоремы 2.1, имеем

$$\zeta_N[\Psi] \geq 2 \sum_{k=0}^{L-1} \left(\frac{L}{k+1}\right)^{v\gamma} \int_{v_k}^{v_{k+1}} \varphi^*_k(t)dt \geq$$

$$\geq \frac{2+o(1)}{N^s} \left(\frac{s+1}{s+1-\gamma}\right)^{r+1} \inf_c \|B_s^*(t) - c\|_{L_1}.$$

Оценка снизу получена.

Оценим погрешность к.ф. (2.8). Очевидно, при целом γ

$$|R_N(f)| \leq \sum_{k=1}^{L-1} \left| \int\limits_{v_k}^{v_{k+1}} f(x)dx - l_{M,s,\infty}(f;[v_k,v_{k+1}]) \right| +$$

$$+2 \left| \int\limits_{v_{L+1}}^{1} f(x)dx - l_{M,r,\infty}(f;[v_{L+1},1]) \right| \leq$$

$$\leq 2(1+o(1)) \Big((M^r L^{v(r+1)})^{-1} \inf_c \|B_s^*(t)-c\|_{L_1} +$$

$$+N^{-s} \sum_{k=1}^{L-1} (v_{k+1}-v_k)^{s+1} (L/k)^{\gamma} \inf_c \|B_s^*(t)-c\|_{L_1} \Big) \leq$$

$$\leq (2+o(1)) N^{-s} ((s+1)/(s+1-\gamma))^{r+1} \inf_c \|B_s^*(t)-c\|_{L_1}. \qquad (2.9)$$

Теорема доказана для целого γ.

В случае, когда $\gamma-$ нецелое число, необходимо внести изменение в оценку слагаемого, имеющего индекс $k = L-1$.

Так как $\|\varphi^{(r+1)}(t)\| \leq (d(t,\Gamma))^{-\mu}$, то $\varphi^{(r+1)}(t) \in L_p$ при $p < 1/\mu$. Следовательно, $\varphi(t) \in W^{r+1}L_p$ при $p < 1/\mu$. В работе [70] показано, что если $\varphi(t) \in W^{r+1}L_p$, то

$$\left| \int\limits_{v_{L-1}}^{1} \varphi(t)dt - l_{M,r+1,p}(\varphi,[v_0,v_1]) \right| \leq$$

$$\leq \frac{1+o(1)}{(r+1)!M^{r+1}} \frac{1}{L^{vr_1}} \inf_c \|B_{r+1}(t)-c\|_{L_q} = o(N^{-s}),$$

где $q = p/(p-1), r_1 = r+\zeta-1/q$.

Из этого неравенства следует справедливость теоремы для нецелого γ при $q < (s+1)/\gamma$.

Теорема 2.3. Пусть $\Psi = Q_{r,\gamma,p}(\Omega,1)$, $\Omega = [-1,1]$. Среди всевозможных к.ф. вида (2.1) при $\rho = s-1$, $-1 < x_k < 1, k = -N,\dots,N$, асимптотически оптимальной является формула

$$\int\limits_{-1}^{1} f(x)dx = \sum_{k=-N+1}^{N-1} \sum_{l=0}^{s-1} p_{kl} f^{(l)}(v_k) + R_N(f), \qquad (2.10)$$

где $v_{\pm k} = \pm 1 \mp ((N-k)/N)^v$, $v = (s+1/q)/(s+1/q-\gamma)$, $k = 0,1,\dots,N$, $p_{kl} = \varphi^{(s-l)}(v_k-0) - \varphi^{(s-l-1)}(v_k+0)$,

$$\varphi(x) = \begin{cases} (1+x)^s/s! & \text{при } -1 \leq x \leq x_{-N+1}, \\ R_{sq}(v'_k,(v_{k+1}-v_k)/2,x) & \text{при } v_k \leq x \leq v_{k+1}, \\ k = -N+1,\dots,N-1, & \\ (1-x)^s/s! & \text{при } x_{N-1} \leq x \leq 1, \end{cases} \qquad (2.11)$$

где $v'_k=(v_{k+1}+v_k)/2$. Погрешность этой формулы равна

$$R_N[\Psi]=(1+o(1))\alpha_N,$$

где $\alpha_N=2^{1/q}(s+1/q)^{s+1/q}R_{sq}(1)/((sq+1)^{1/q}(s+1/q-\gamma)^{s+1/q}2^sN^ss!)$.

Доказательство. Вначале оценим снизу величину $\zeta_N[\Psi]$. Пусть $M=[\ln N], L=[N/M]$, $v_{\pm k}=\pm 1\mp(k/L)^v, k=0,1,\ldots,L, v=(s+1/q)/(s+1/q-\gamma)$. Построим функцию $\varphi^*(t)\in W^rL_p(1)$, обращающуюся в нуль вместе с производными до $(s-1)$-го порядка включительно в узлах $\{x_k\}$ к.ф. (2.1) и в точках $\{v_k\}$. Введем функцию $\psi^*(t)$ по формуле

$$\psi^*(t)=\begin{cases}\varphi^*(t)/((k+1)/L)^{v\gamma} & \text{при } t\in[v_k,v_{k+1}],\\ \varphi^*(t)/((k+1)/L)^{v\gamma} & \text{при } t\in[v_{-k-1},v_{-k}].\end{cases}$$

Нетрудно видеть, что функция $\psi^*(t)\in Q_{r,\gamma,p}(\Omega,1)$. Очевидно,

$$\zeta_N[\Psi]\geq\int\limits_{-1}^{1}\psi^*(t)dt=\sum_{k=0}^{L-1}\left[\int\limits_{v_{-k-1}}^{v_{-k}}\psi^*(t)dt+\int\limits_{v_k}^{v_{k+1}}\psi^*(t)dt\right]\geq$$

$$\geq 2\sum_{k=1}^{L-1}\frac{A_k(v_{k+1}-v_k)^{s+1/q}R_{sq}(1)}{((k+1)/L)^{v\gamma}2^ss!(sq+1)^{1/q}(N_k-1+(R_{sq}(1))^{1/s})^s},$$

где

$$A_k=\left[\int\limits_{v_k}^{v_{k+1}}\left|\psi^{*(s)}(t)\right|^p dt\right]^{1/p},$$

N_k- число узлов к.ф. (2.1) на сегменте $[v_k,v_{k+1}]$.

Положив $A_0=A_1=\ldots,A_{L-1}=(1/2L)^{1/p}$, имеем $\zeta[\Psi]\geq(1+o(1))\alpha_N$.

Оценим погрешность к.ф. (2.10). Интегрированием по частям доказывается [64, с. 150] формула

$$\int\limits_{-1}^{1}f(x)dx=\sum_{k=-N}^{N}\sum_{l=0}^{s-l-1}(-1)^lf^{(l)}(x)\varphi^{(s-1)}(x)\Bigg|_{v_k}^{v_{k+1}}-$$

$$-\frac{1}{s!}\int\limits_{-1}^{1}f^{(s)}(x)\varphi(x)dx. \tag{2.12}$$

Следовательно,

$$|R_N(f)|=\frac{1}{s!}\left|\int\limits_{-1}^{1}f^{(s)}(x)\varphi(x)dx\right|\leq$$

$$\leq \frac{1}{s!}\left[\int_{-1}^{1}\left|(d(x,\Gamma))^{\gamma} f^{(s)}(x)\right|^{p} dx\right]^{1/p}\left[\int_{-1}^{1}\left|(d(x,\Gamma))^{-\gamma}\varphi(x)\right|^{q}\right]^{1/q} \leq$$

$$\leq \frac{1}{s!}\left[\int_{-1}^{1}\left|(d(x,\Gamma))^{-\gamma}\varphi(x)\right|^{q} dx\right]^{1/q} \leq \alpha_N(1+o(1)).$$

Теорема доказана.

Пусть $M = [\ln N], L = [N/M]$. Рассмотрим к.ф.

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx = \sum_{k=0}^{L-1} l_{Msp}(f;[v_k, v_{k+1}]) + \sum_{k=0}^{L-1} l_{Msp}(f;[v_{-k-1}, v_{-k}]) +$$

$$+R_N(f), \tag{2.13}$$

где $v_{\pm k} = \pm 1 \mp ((L-k)/L)^v$, $k = 0, 1, \ldots, L$, $v = (s+1/q)/(s+1/q-\gamma)$.

Теорема 2.4. На классе $\Psi = Q_{r,\gamma,p}(\Omega, 1)$, $\Omega = [-1, 1]$ среди всевозможных к.ф. вида (2.1) при $\rho = 0$ асимптотически оптимальной является формула (2.13). Ее погрешность равна

$$R_N[\Psi] = (1+o(1))2^{1/q}((s+1/q)/(s+1/q-\gamma))^{s+1/q} N^{-s} \inf_c \|B_s^*(t)-c\|_{L_q}.$$

Доказательство этой теоремы подобно доказательству теоремы 2.2, и поэтому опускается.

Выше построены асимптотически оптимальные к.ф. для вычисления интегралов на классах $Q_{r,\gamma,p}(\Omega, M)$, $\Omega = [-1, 1]$, при различных значениях γ и p. Практическая реализация некоторых из приведенных формул довольно затруднительна, и представляет интерес построение на классе $Q_{r,\gamma,p}$ менее точных, но более простых формул.

Обозначим через N_1 величину $[N/(2r+1)]+1$, а через $\Delta_k (\Delta_{-k})-$ сегменты $[s_{k+1}, s_k]$ $([s_{-k}, s_{-k-1}])$, где $s_{\pm k} = \pm 1 \mp ((2r+1)k/N)^2$, $k = 0, 1, \ldots, N_1 - 1$, причем $s_{\pm N_1} = 0$ по определению. Обозначим через $T_{2r+1}(x, \Delta_k)$ полином Чебышева степени $2r+1$, наименее уклоняющийся от нуля в равномерной метрике на сегменте Δ_k, а через $x_1^{(k)}, \ldots, x_{2r+1}^{(k)}-$ его корни. Через $P_{2r+1}(x, \Delta_k)$ обозначим полином, интерполирующий функцию $f(x)$ на сегменте Ω по узлам $x_1^{(k)}, \ldots, x_{2r+1}^{(k)}$.

Рассмотрим к.ф.

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx = \sum_{k=0}^{N_1-1}\left[\int_{s_{k+1}}^{s_k} P_{2r+1}(x, \Delta_k)dx + \int_{s_{-k}}^{s_{-k-1}} P_{2r+1}(x, \Delta_{-k})dx\right] +$$

$$+R_N(f). \tag{2.14}$$

Теорема 2.5. Погрешность к.ф. (2.14) на классе $\Psi = Q_r(\Omega, 1)$ оценивается неравенством

$$R_N[\Psi] \le (1 + o(1))(2r + 1)^{2r+1}/(2^{2r-1}(2r + 1)!N^{2r+1}).$$

Доказательство. Пусть $\psi_{2r+1}(x, \Delta_k) = f(x) - P_{2r+1}(x, \Delta_k)$. Погрешность к.ф. (2.14) можно представить в виде неравенства

$$|R_N(f)| \le \sum_{k=0}^{N_1-1} |\int\limits_{s_{k+1}}^{s_k} \psi_{2r+1}(x, \Delta_{k+1})dx| + \sum_{k=0}^{N_1-1} | \int\limits_{s_{-k}}^{s_{-k-1}} \psi_{2r+1}(x, \Delta_{k+1})dx| =$$

$$= I_1 + I_2.$$

Так как суммы I_1 и I_2 оцениваются одинаково, то ограничимся рассмотрением первой из них. Известно (лемма 3.2 главы 1), что на сегменте $[-1, 1]$ погрешность интерполяционной формулы оценивается неравенством

$$\|f(x) - P_{2r+1}(x, [-1, 1])\| \le \|f^{(2r+1)}\|/(2r + 1)!4^r.$$

Поэтому

$$I_1 = |\int\limits_{s_1}^{s_0} \psi_{2r+1}(x, \Delta_1)dx\| + \sum_{k=1}^{N_1-1} |\int\limits_{s_{k+1}}^{s_k} \psi_{2r+1}(x, \Delta_{k+1})dx| \le$$

$$\le (1 + o(1))(2r + 1)^{2r+1}/4^r(2r + 1)!N^{2r+1}.$$

Следовательно,

$$R_N[\Psi] \le (1 + o(1))(2r + 1)^{2r+1}/(2^{2r-1}N^{2r+1}(2r + 1)!).$$

Теорема доказана.

Исследуем вопросы построения к.ф. для вычисления интегралов на классе $B_{r,\gamma}(\Omega, M)$.

Теорема 2.6. Пусть $\Psi = B_{r,\gamma}(\Omega, M)$, $\Omega = [-1, 1]$. Квадратурная формула

$$\int\limits_{-1}^{1} f(x)dx = \sum_{l=0}^{r} p_{-N+1,l} f^{(l)}(v_{-N+1}) + \sum_{k=-N+2}^{N-2} \sum_{l=0}^{s-1} p_{kl} f^{(l)}(v_k) +$$

$$+ \sum_{l=0}^{r} p_{N-1,l} f^{(l)}(v_{N-1}) + R_N(f),$$

где $v_{\pm k} = \pm 1 \mp ((N-k)/N)^v$, $k=0,1,\ldots,N$, $v=(s+1)/(r+2-\gamma)$, $s+1 = [8(r+2-\gamma)N/(Me^2)]$, $p_{kl} = \varphi^{(s-l-1)}(v_k - 0) - \varphi^{(s-l)}(v_k+0)$, функция $\varphi(x)$ определена формулой (2.11), имеет погрешность

$$R_N[\Psi] \leq BN^{-3/2} e^{-(8N(r+2-\gamma)/Me^2)},$$

$B-$ const.

Доказательство. Воспользовавшись формулой (2.12), имеем:

$$|R_N(f)| \leq \frac{1}{s!}\int\limits_{-1}^{1} |f^{(s)}(x)||\varphi(x)|dx = \frac{1}{((r+1)!)^2}\int\limits_{-1}^{t_{-N+1}} (1+x)^{r+1}|f^{(r+1)}(x)|dx +$$

$$+\frac{1}{((r+1)!)^2}\int\limits_{t_{N-1}}^{1} (1-x)^{r+1}|f^{(r+1)}(x)|dx +$$

$$+\frac{1}{s!}\sum_{k=0}^{N-2}\int\limits_{v_k}^{v_{k+1}} |R_s(t'_k, \frac{t_{k+1}-t_k}{2}, x)||f^{(s)}(x)|dx +$$

$$+\frac{1}{s!}\sum_{k=0}^{N-2}\int\limits_{v_{-k-1}}^{v_{-k}} |R_s(t_{-k-1}, \frac{t_{-k}-t_{-k-1})}{2}, x)||f^{(s)}(x)|dx.$$

Так как $f(x) \in B_{r,\gamma}$, то

$$\frac{1}{((r+1)!)^2}\int\limits_{-1}^{v_{-N+1}} (1+x)^{r+1}|f^{(s)}(x)|dx \leq$$

$$\leq \frac{M^{r+1}(r+1)^{r+1}}{((r+1)!)^2}\int\limits_{-1}^{v_{-N+1}} (1+x)^{r+1-\gamma}dx = \frac{1+o(1)}{r+2-\gamma}\left(\frac{1}{N}\right)^{s+1}.$$

Аналогично

$$\frac{1}{((r+1)!)^2}\int\limits_{v_{N-1}}^{1} (1-x)^{r+1}|f^{(r+1)}(x)|dx \leq \frac{1+o(1)}{r+2-\gamma}\left(\frac{1}{N}\right)^{s+1}.$$

Воспользуемся формулой (2.3). Тогда

$$\frac{1}{s!}\sum_{k=0}^{N-2}\int\limits_{t_k}^{t_{k+1}} |R_s(t'_k, (t_{k+1}-tt_k)/2, x)||f^{(s)}(x)|dx \leq$$

$$\leq \frac{1}{s!}\left(\frac{N}{k}\right)^{v(s-r-1+\gamma)} (t_{k+1}-t_k)^{s+1} M^s s^s 2^{-3s+1} \leq$$

$$\leq \frac{1+o(1)}{\sqrt{2\pi s}}\left(\frac{s+1}{r+2-\gamma}\right)^{s+1}\frac{M^s s^s}{N^{s+1}}2^{2s+1}\left(\frac{e}{s}\right)^{s+1}=r_1.$$

Полагая $s+1=[8(r+2-\gamma)N/Me^2]$, имеем:

$$r_1 \leq \frac{1+o(1)}{4\sqrt{\pi}}e^3\sqrt{M}(r+2-\gamma)^{-3/2}e^{-8N(r+2-\gamma)/(Me^2)}.$$

Таким образом,

$$R_N[\Psi] \leq BN^{-3/2}e^{-(8N(r+2-\gamma)/Me^2)}.$$

Обозначим через n число использованных функционалов $f^{(k)}(t_i)$. Нетрудно видеть, что $n=16[(r+2-\gamma)N^2/Me^2]+1$. Отсюда следует, что

$$R_n[\Psi] \leq Bn^{-3/4}e^{-2\sqrt{n(r+2-\gamma)/Me^2}}.$$

Теорема доказана.

Построенная к.ф. при своей реализации требует вычисления производных высокого порядка. Рассмотрим к.ф., допускающую более простую реализацию.

Пусть $v_{\pm k}=\pm 1\mp((N-k)/N)^v, k=0,1,\ldots,N, v=(s+1)/(r+ +2-\gamma), s+1=[(r+1)N/e]$. Ниже используются полиномы $P_r(x,\Delta_k)$, определенные при доказательстве теоремы 2.5. Введем сплайн

$$f_N(x)=\begin{cases} P_r(x,[-1,v_{-N+1}]) & \text{при} \quad -1\leq x\leq v_{-N+1},\\ P_s(x,[v_{k-1},v_k]) & \text{при} \quad -N+1\leq k\leq 0,\\ P_s(x,[v_k,v_{k+1}]) & \text{при} \quad 0\leq k\leq N-1,\\ P_r(x,[v_{N-1},v_N]) & \text{при} \quad v_{N-1}\leq x\leq 1\end{cases}$$

и рассмотрим к.ф.

$$\int\limits_{-1}^{1} f(x)dx=\int\limits_{-1}^{1} f_N(x)dx+R_N(f). \tag{2.15}$$

Нетрудно видеть, что

$$|R_N(f)| \leq \frac{2}{2^r r! r^2}\left(\frac{1}{N}\right)^{v(r+1-\gamma)}+2\sum_{k=1}^{N-2}\left(\frac{N}{k}\right)^{v(s-r-1+\gamma)}(v_{k+1}-v_k)^{s+1}=$$

$$=B\left(\left(\frac{1}{N}\right)^{s+1}+\left(\frac{v}{N}\right)^{s+1}\right)=B\left(\left(\frac{1}{N}\right)^{s+1}+\left(\frac{s+1}{(r+2-\gamma)N}\right)^{s+1}\right).$$

Положим $s+1=[(r+1)N/e]$. Тогда $|R_N(f)|\leq Be^{-(r+2-\gamma)N/e}$.

Теорема 2.7. Пусть $\Psi = B_{r,\gamma}(\Omega, M)$, $\Omega = [-1,1]$. К.ф. (2.15) имеет погрешность

$$R_N[\Psi] \leq Be^{-(r+2-\gamma)N/e},$$

где $B-$ const.

3. Адаптивные алгоритмы на классе $\mathbf{Q_{r,\gamma,p}(\Omega, M), \Omega = [-1, 1]}$

Воспользуемся результатами, полученными в пятой главе при исследовании адаптивных алгоритмов восстановления функций, для построения адаптивных алгоритмов вычисления интеграла

$$If = \int\limits_{-1}^{1} f(t)dt \tag{3.1}$$

на классе $Q_{r,\gamma,p}(\Omega, M), \Omega = [-1, 1]$.

Адаптивный алгоритм вычисления интеграла (3.1) заключается в следующем. Сегмент $[-1, 1]$ последовательно разбивается на более мелкие сегменты. В каждом таком сегменте интеграл вычисляется по одной и той же к.ф.. Необходимо построить алгоритм последовательного разбиения сегмента так, чтобы в результате его использования в каждом из сегментов разбиения погрешность вычисления интеграла была бы величиной одного порядка.

Теорема 3.1. Пусть $f(t) \in Q_{r,\gamma,p}(\Omega, M)$, $\Omega = [-1, 1], sp \geq 2$. Существует адаптивный алгоритм вычисления интегралов вида (3.1), использующий значения подынтегральной функции и ее производных до $(s-1)$-го порядка в n узлах и имеющий погрешность

$$R_n(f) = A \begin{cases} n^{-s} & \text{при}\, \gamma < (s-\gamma)/(sp-2), \\ n^{-(s-\gamma)(sp-1)} & \text{при}\, \gamma > (s-\gamma)(sp-2), \\ n^{-s}(\ln n)^{s(sp-2)/(sp-1)} & \text{при}\, \gamma = (s-\gamma)(sp-2). \end{cases}$$

Доказательство. В главе 5 был построен адаптивный алгоритм восстановления функции $f(t) \in Q_{r,\gamma,p}(\Omega, M)$. Обозначим сплайн, полученный в результате применения описанного алгоритма через $s_N(f)$. Тогда адаптивный алгоритм вычисления интеграла If заключается в аппроксимации его интегралом $I(s_N(f))$. Воспользовавшись оценками теоремы 9.1 главы 5 завершаем доказательство теоремы.

Теорема 3.2. Пусть $f(t) \in Q_{r,\gamma,p}(\Omega, M)$, $\Omega = [-1, 1], sp \geq 2$. Существует адаптивный алгоритм вычисления интегралов вида If, использующий значения подынтегральной функции и ее производных до $(s-1)$-го порядка в n узлах и имеющий погрешность $R_N(f) \leq AN^{-s}$, если:
а) $w < 1$;
б) $w = 1$ и $(s+1)q/(s+1-\gamma)p(sp+1) < 1$;
в) $w > 1$ и $(s+1)q(s+1-\gamma)p(sq+1) \leq 1$,
где $w = (v-1)q/(psq+p-q)$, $v = (s+1)/(s+1-\gamma)$, $1/p + 1/q = 1$.

Доказательство. Разобьем сегмент $[-1,1]$ на $2N$ частей точками $t_k^1 = -1 + (k/N)^v, t_k^2 = 1 - (k/N)^v, v = (s+1)/(s+1-\gamma)$. Введем сегменты $\Delta_k^1 = [t_k^1, t_{k+1}^1], \Delta_k^2 = [t_{k+1}^2, t_k^2]$; через C_k^i обозначается середина сегмента Δ_k^i.

Нетрудно видеть, что погрешность вычисления интеграла

$$\int\limits_{\Delta_k^i} f(t)dt$$

при аппроксимации функции $f(t)$ отрезком ряда Тейлора $T_{s-1}(f, \Delta_k^i, C_k^i)$ оценивается неравенством

$$r(\Delta_k^i) = \int\limits_{\Delta_k^i} \left|f(t) - T_{s-1}(f, \Delta_k^i, C_k^i)\right| dt \le A(h_k^i)^{s+1/q} \|f^{(s)}\|_{L_p(\Delta_k^i)},$$

где $h_k^i = |t_{k+1}^i - t_k^i|$.

Ниже для определенности положим $i = 1$. Введем обозначение

$$\psi(t_k^i) = \left[\int\limits_{\Delta_k^i} \left|f^{(s)}(t)\right|^p dt\right]^{1/p}.$$

Пусть $\psi(t_k^1) = m_k^1 (h_k^1)^{1/p} (N/(k+1))^{v\gamma}$. Рассмотрим две возможности: 1) $m_k^1 \le 1$; 2) $m_k^1 > 1$.

В первом случае

$$r(\Delta_k^1) \le A h_k^{s+1} (N/(k+1))^{v\gamma} |f^{(s)}\|_{L_p(\Delta_k^i)} \le AN^{-(s+1)} \|f^{(s)}\|_{L_p(\Delta_k^i)}.$$

Во втором случае разделим сегмент Δ_k^i на $n_k^i = [(m_k^i)^{q/(sq+1)}]$ равных частей. Тогда погрешность на каждом участке разбиения не превосходит величины

$$A(h_k^1/n_k^1)^{s+1/q} m_k^1 (h_k^1)^{1/p} (N/(k+1))^{v\gamma} \le AN^{-s-1}.$$

Покажем, что $\sum\limits_{k=0}^{N-1} n_k^1 \le AN$. В самом деле,

$$\sum_{k=0}^{N-1} (m_k^1)^p h_k^1 = \sum_{k=0}^{N-1} ((k+1)/N)^{v\gamma p} (\psi(t_k^1))^p =$$

$$= \sum_{k=0}^{N-1} \left(\frac{k+1}{N}\right)^{v\gamma p} \int\limits_{\Delta_k^1} \left|f^{(s)}(t)\right|^p dt \le 2 \int\limits_{-1}^{0} (d(t,\Gamma) \left|f^{(s)}(t)\right|)^p dt \le 2.$$

Воспользовавшись неравенством Гельдера с $\alpha = q/p(sq+1)$ и $\alpha_1 =$
$= q/(q-psq-p) \quad (1/\alpha + 1/\alpha_1 = 1)$, имеем:

$$2 \geq \sum_{k=0}^{N-1} (m_k^1)^p h_k^1 \geq \left(\sum_{k=0}^{N-1} m_k^{q/(sq+1)} \right)^{p(sq+1)/q} \left(\sum_{k=0}^{N-1} (h_k^1)^{q/(q-psq-p)} \right)^{(q-psq-p)/q} =$$

$$= \left(\sum_{k=0}^{N-1} m_k^{q/(sq+1)} \right)^{p(sq+1)/q} \left(\frac{1}{\sum\limits_{k=0}^{N-1} (h_k^1)^{q/(q-psq-p)}} \right)^{(psq+p-q)/q} \geq$$

$$\geq AN^{-v} \left(\sum_{k=0}^{N-1} m_k^{q/(sq+1)} \right)^{p(sq+1)/q} \left(\frac{1}{\sum\limits_{k=1}^{N-1} k^{(v-1)q/(q-psq-p)}} \right)^{(psq+p-q)/q} =$$

$$= \left(\sum_{k=0}^{N-1} m_k^{q/(sq+1)} \right)^{p(sq+1)/q} \times$$

$$\times \begin{cases} N^{-(psq+p)/q} & \text{при } w < 1, \\ N^{-v} (\ln N)^{-(psq+p-q)/q} & \text{при } w = 1, \\ N^{-v} & \text{при } w > 1. \end{cases}$$

Из последнего неравенства следует, что

$$n \leq A \begin{cases} N & \text{при } w < 1, \\ N^{(s+1)q/((s+1-\gamma)p(sq+1))} \ln N & \text{при } w = 1, \\ N^{(s+1)q/(s+1-\gamma)p(sq+1)} & \text{при } w > 1. \end{cases}$$

Таким образом, если 1) $w < 1$; 2) $w = 1$ и $(s+1)q/(s+1-\gamma)p(sq+$ $+1) < 1$; 3) $w > 1$ и $(s+1)q/(s+1-\gamma)p(sq+1) \leq 1$, то для достижения погрешности вычисления интеграла If, равной AN^{-s}, требуется добавить AN узлов к.ф.

Теорема доказана.

Глава 7

КУБАТУРНЫЕ ФОРМУЛЫ

1. Наилучшие кубатурные формулы

Пусть l-мерный интеграл вычисляется по формуле

$$\int\limits_0^1 \dots \int\limits_0^1 f(x_1, \dots, x_l) dx_1 \dots x_l =$$

$$= \sum_{k_1=1}^{n_1} \dots \sum_{k_l=1}^{n_l} \sum_{i_1=1}^{\rho_1} \dots \sum_{i_l=1}^{\rho_l} p_{k_1,\dots,k_l,i_1,\dots,i_l} f^{(i_1,\dots,i_l)}(t_{k_1}, \dots, t_{k_l}) +$$

$$+ R_{n_1,\dots,n_l}(f). \tag{1.1}$$

К настоящему времени построены наилучшие кубатурные формулы для некоторых классов функций [48, 57, 64].

Ниже предлагается несколько утверждений о связи между наилучшими квадратурными и кубатурными формулами.

Теорема 1.1. Пусть $\Omega = [0, 1]^l$, $l = 2, 3, \dots$. Пусть выполнены условия:

1) функции $f(x_1, \dots, x_l)$ принадлежат классу $\Psi_{1,\dots,l}$;

2) на классе Ψ_i среди всевозможных квадратурных формул вида
$\int\limits_0^1 f(x)dx = \sum\limits_{k=1}^{n_i} p_k^i f(t_k^i) + R(f)$ имеется наилучшая, которая определяется векторами $\{p_k^{*i}\}$ и $\{t_k^{*i}\}$, $k = 1, 2, \dots, n_i$ коэффициентов и узлов, точная оценка погрешности которой, равна $\rho_{n_i}^{*i}$, причем $p_k^{*i} \geq 0$ для $k = 1, 2, \dots, n_i$, $i = 1, 2, \dots, l$.

Тогда среди всевозможных кубатурных формул вида (1.1) при $\rho_1 = \dots = \rho_l = 0$ наилучшей является формула

$$\int\limits_0^1 \dots \int\limits_0^1 f(x_1, \dots, x_l) dx_1 \dots dx_l =$$

$$= \sum_{k_1=1}^{n_1} \dots \sum_{k_l=1}^{n_l} p_{k_1}^{*1} \dots p_{k_l}^{*l} f(t_{k_1}^{*1}, \dots, t_{k_l}^{*l}) + R(f), \tag{1.2}$$

точная оценка погрешности которой равна $\sum\limits_{i=1}^{l} \rho_{n_i}^{*i}$.

Следствие 1.1. Среди всевозможных кубатурных формул вида (1.1) наилучшей на классе $\tilde{H}^{\alpha}_{l,p}(1)$ является формула

$$\int\limits_0^1 \dots \int\limits_0^1 f(x_1,\dots,x_l)dx_1\dots dx_l =$$

$$= 2^l h_1\dots h_l \sum_{k_1=1}^{n_1}\dots\sum_{k_1=l}^{n_l} f((2k_1-1)h_1,\dots,(2k_l-1)h_l)+R(f), \quad (1.3)$$

где $h_i = 1/2n_i, i = 1,2,\dots,l$. Точная оценка погрешности этой формулы равна

$$R_n[\tilde{H}^{\alpha}_{l,p}(1)] = \inf_c \|B^*_{\alpha}(t)-c\|_{L_q}\sum_{k=1}^{l}\frac{1}{n_k^{\alpha}},$$

где $1/p+1/q=1$.
При $p=\infty$

$$R_n\left[\tilde{H}^{\alpha}_{l,\infty}(1)\right] = \frac{K_{\alpha}}{(2\pi)^{\alpha}}\sum_{k=1}^{l}\frac{1}{n_k^{\alpha}}.$$

Следствие 1.2. Среди всевозможных кубатурных формул вида (1.1) наилучшей на классе $\tilde{D}^{\alpha}_{l,p}(1)$ является формула (1.3), точная оценка погрешности которой равна

$$R_n[\tilde{D}^{\alpha}_{l,p}(1)] = \inf_c \|B^*_{l\alpha}(t)-c\|_{L_q}\sum_{k=1}^{l}\frac{1}{n_k^{l\alpha}},$$

где $1/p+1/q=1$.
При $p=\infty$

$$R_n\left[\tilde{D}^{\alpha}_{l,\infty}(1)\right] = \frac{K_{\alpha}}{(2\pi)^{\alpha}}\sum_{k=1}^{l}\frac{1}{n_k^{l\alpha}}.$$

Доказательство теоремы 1.1. Оценим снизу функционал $\zeta_n[\Psi_{1,\dots,l}]$. Пусть $\Psi_i(i = 1,2,\dots,l)-$ выпуклое, центрально-симметричное множество функций переменной $x_i(i=1,2,\dots,l)$, инвариантное относительно сдвига на константу. Из леммы С. А. Смоляка следует существование функций $f_i^*(x_i) \in \Psi_i(i = 1,2,\dots,l)$, обращающихся в нуль в узлах $t^i_{k_i}(k_i = 1,2,\dots,n_i,\ i = 1,2,\dots,l)$ и таких, что

$$\gamma^{(i)}_{n_i}(\{t^i_{k_i}\}_{k_i=1,2,\dots,n_i}) = \inf_{p_{k_i}}\sup_{f\in\Psi_i}\left|\int\limits_0^1 f(x)dx - \sum_{k_i=1}^{n_i} p_{k_i} f(t^i_{k_i})\right| = \int\limits_0^1 f_i^*(x)dx.$$

Введем функцию

$$f^*(x_1,\dots,x_l)=\sum_{i=1}^{l} f_i^*(x_i).$$

Нетрудно видеть, что $f^*(x_1,\dots,x_l)\in\Psi_{1,2,\dots,l}$.

Подставляя функцию $f^*(x_1,\dots,x_l)$ в кубатурную формулу (1.1), имеем:

$$R(f)=\left|\int\limits_{\Omega} f^*(x_1,\dots,x_l)dx_1\dots dx_l-\sum_{k_1=1}^{n_1}\dots\sum_{k_l=1}^{n_l} p_{k_1,\dots,k_l} f^*(t_{k_1},\dots,t_{k_l})\right|=$$

$$=\left|\int\limits_{\Omega} f^*(x_1,\dots,x_l)dx_1\dots dx_l\right|\ge\sum_{i=1}^{l}\gamma_{n_i}^{(i)}(\{t_{k_i}^i\}_{k_i=1,2,\dots,n_i})\ge\sum_{i=1}^{l}\rho_{n_i}^i, \tag{1.4}$$

где

$$\rho_{n_i}^i=\inf_{p_k,t_k}\sup_{f\in\Psi_i}\left|\int\limits_0^1 f(x)dx-\sum_{k=1}^{n_i} p_k f(t_k)\right|.$$

Оценка снизу получена.

Нетрудно видеть, что

$$|R(f)|=\left|\int\limits_{\Omega} f(x_1,\dots,x_l)dx_1\dots dx_l-\right.$$

$$\left.-\sum_{k_1=1}^{n_1}\dots\sum_{k_l=1}^{n_l} p_{k1}^{*1}\dots p_{kl}^{*l} f(t_{k_1}^{*1}\dots t_{k_l}^{*l})\right|\le$$

$$\le\left|\int\limits_{\Omega} f(x_1,\dots,x_l)dx_1\dots dx_l-\sum_{k_1=1}^{n_1} p_{k_1}^{*1}\int\limits_0^1\dots\int\limits_0^1 f(t_{k_1}^{*1},x_2,\dots,x_l)dx_2\dots dx_l\right|+$$

$$+\left|\sum_{k_1=1}^{n_1} p_{k_1}^{*1}\left[\int\limits_0^1\dots\int\limits_0^1 f(t_{k_1}^{*1},x_2,\dots,x_l)dx_2\dots dx_l-\right.\right.$$

$$\left.\left.-\sum_{k_2=1}^{n_2} p_{k_2}^{*2}\int\limits_0^1\dots\int\limits_0^1 f(t_{k_1}^{*1},t_{k_2}^{*2},x_3,\dots,x_l)dx_3\dots dx_l\right]\right|+\dots+$$

$$+\left|\sum_{k_1=1}^{n_1}\dots\sum_{k_{l-1}=1}^{n_l}\left[\int\limits_0^1 f(t_{k_1}^{*1},\dots,t_{k_{l-1}}^{*(l-1)},x_l)dx_l-\sum_{k_1=1}^{n_l} p_{k_1}^{*l} f(t_{k_1}^{*1},\dots,t_{k_l}^{*l})\right]\right|.$$

Так как функция

$$\phi(x_i) = \int\limits_0^1 \dots \int\limits_0^1 f(t^*_{k_1}, \dots, t^*_{k_{i-1}}, x_i, x_{i+1}, \dots, x_l) dx_{i+1} \dots dx_l$$

принадлежит классу Ψ_i и $\sum\limits_{k_i=1}^{n_i} p_k^{*i} = 1$ при $i = 1, 2, \dots, l$, то из предыдущего неравенства следует оценка

$$|R(f)| \le \sum_{i=1}^{l} \rho^i_{n_i}. \tag{1.5}$$

Из неравенств (1.4) и (1.5) следует справедливость теоремы.

Доказательства следствий 1.1 и 1.2. Справедливость утверждений, приведенных в следствиях 1.1 и 1.2, следует из теоремы 1.1 и оценок погрешности наилучших к.ф. на классах $\tilde{W}^r_p(1)$, приведенных в разделе 3 главы 1.

Перейдем к построению наилучших кубатурных формул вида (1.1) на классе функций $W_*^{r_1,\dots,r_l} L_p(\Omega)$, $\Omega = [0,1]^l$. Пусть при каждом j ($j =$
$= 1, 2, \dots, l$) среди всевозможных квадратурных формул вида

$$\int\limits_0^1 f(x)dx = \sum_{k_j=1}^{n_j} \sum_{l_j \in I_j} p^j_{k_j l_j} f^{(l_j)}(t^j_{k_j}) + R(f) \tag{1.6}$$

на классе $W^{r_j} L_p(1)$ имеется наилучшая формула, определяемая узлами $t^{*j}_{k_j}$ и весами $p^{*j}_{k_j l_j}$, $k_j = 1, 2, \dots, n_j$, $l_j \in I_j, j = 1, 2, \dots, l$. Точная погрешность этой формулы равна $\rho^j_{n_j}$.

Теорема 1.2. Среди всевозможных кубатурных формул вида (1.1) наилучшей на классе $W_*^{(r_1,\dots,r_l)} L_p(\Omega)$ является формула, определяемая узлами $\{t^1_{k_1}, \dots, t^l_{k_l}\} = \{t^{*1}_{k_1}, \dots, t^{*l}_{k_l}\}$ и коэффициентами $p_{k_1 \dots k_l i_1 \dots i_l} =$
$= p^{*1}_{k_1 i_1} \dots p^{*l}_{k_l i_l}$. Погрешность этой формулы равна

$$\rho^1_{n_1} + \rho^2_{n_2} + \dots + \rho^l_{n_l} + \rho^1_{n_1}\rho^2_{n_2} + \dots + \rho^1_{n_1} \dots \rho^l_{n_l}.$$

При $l = 2$ эта теорема доказана в [57], при произвольном конечном $l-$ другим способом в [19].

2. Об одном способе вычисления кратных интегралов

В монографии [79] изложен способ вычисления кратных интегралов с помощью разверток типа кривой Пеано. Ниже предлагается другой способ приближенного сведения кратных интегралов от периодических функций к одномерным интегралам. Этот способ анонсирован в заметке [19]. Отметим, что различные способы периодизации функций исследованы в монографии [52].

Лемма 2.1. Пусть периодическая, с периодом 2π по каждой переменной, функция $f(x_1, x_2)$ разлагается в абсолютно сходящийся ряд Фурье; q_1, q_2- простые числа, $q_1 \neq q_2$. Тогда справедлива формула

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x_1,x_2)dx_1dx_2 = 2\pi\int_0^{2\pi} f(q_1t, q_2t)dt - 4\pi^2 \sum_{n,m=-\infty}^{\infty}{}' c(n,m), \quad (2.1)$$

где $\sum'$ означает суммирование по n и m таким, что $nq_1 + mq_2 = 0$, $(n,m) \neq (0,0)$.

Доказательство. По условию леммы функция $f(x_1, x_2)$ разлагается в равномерно сходящийся ряд Фурье, т. е.

$$f(x_1,x_2) = c(0,0) + \sum_{k,l=-\infty;(k,l)\neq(0,0)}^{\infty} c(k,l)\exp(i(kx_1 + lx_2)). \quad (2.2)$$

Интегрируя равенство (2.2), имеем:

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x_1,x_2)dx_1dx_2 = 4\pi^2 c(0,0). \quad (2.3)$$

Возьмем два различных простых числа q_1, q_2 и сделаем в равенстве (2.2) подстановку $x_1 = q_1t, x_2 = q_2t$. В результате получаем разложение

$$f(q_1t, q_2t) = c(0,0) + \sum_{k,l=-\infty;(k,l)\neq(0,0)}^{\infty} c(k,l)\exp(i(kq_1 + lq_2)t). \quad (2.4)$$

Интегрируя разложение (2.4), получаем равенство:

$$\int_0^{2\pi} f(q_1t, q_2t)dt = 2\pi c(0,0) + 2\pi \sum_{n,m=-\infty}^{\infty}{}' c(n,m), \quad (2.5)$$

где $\sum'$ означает суммирование по n и m таким, что $nq_1 + mq_2 = 0, (n,m) \neq (0,0)$.

Из сопоставления равенств (2.3) и (2.5) следует справедливость леммы.

Используем формулу (2.1) для построения кубатурных формул на различных классах функций. В монографии [52] построены кубатурные формулы на классах H_s^α и E_s^α при $\alpha > 1$. Построим кубатурную формулу на классе E_2^α при $\alpha > 1/2$.

Теорема 2.1. Пусть $f(x_1, x_2) \in \Psi = E_2^\alpha \cap V_L^*(f)$, где $\alpha > 1/2$, $V_L(f) \leq K$. Тогда кубатурная формула

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x_1, x_2)dx_1 dx_2 = \frac{4\pi^2}{N}\sum_{k=0}^{N-1} f(q_1 2k\pi/N, q_2 2k\pi/N) + R_N(f), \quad (2.6)$$

где q_1 и q_2 $(q_1 \neq q_2, q_1, q_2 = O(N^{1/(1+2\alpha)}))-$ простые числа, имеет погрешность $R_N[\Psi] = O(N^{-2\alpha/(1+2\alpha)})$.

Доказательство. Нетрудно видеть, что погрешность кубатурных формул (2.6) оценивается неравенством

$$|R_N(f)| = \left|\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x_1, x_2)dx_1 dx_2 - \frac{4\pi^2}{N}\sum_{k=0}^{N-1} f(q_1 2k\pi/N, q_2 2k\pi/N)\right| \leq$$

$$\leq \left|\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x_1, x_2)dx_1 dx_2 - 2\pi\int_0^{2\pi} f(q_1 t, q_2 t)dt\right| +$$

$$+\left|2\pi\int_0^{2\pi} f(q_1 t, q_2 t)dt - \frac{4\pi^2}{N}\sum_{k=0}^{N-1} f(q_1 2k\pi/N, q_2 2k\pi/N)\right| = r_1 + r_2.$$

Оценим слагаемые r_1 и r_2. Начнем с оценки r_1 :

$$r_1 = 4\pi^2\left|\sum_{n,m=-\infty}^{\infty}{}' c(n,m)\right| = 4\pi^2\sum_{k=-\infty,k\neq 0}^{\infty} |c(kq_1, kq_2)| \leq$$

$$\leq 4\pi^2\sum_{k=-\infty,k\neq 0}^{\infty} k^{-2\alpha} q_1^{-\alpha} q_2^{-\alpha} = O(q_1^{-\alpha}q_2^{-\alpha}) = O(q^{-2\alpha}), \quad (2.7)$$

где $q = \min(q_1, q_2)$.

Пусть $q_1 > q_2$. Так как функция $f(x_1, x_2) \in V_L(f)$, то полная вариация функции $f(q_1 t, q_2 t)$ не превосходит $2Kq_1$, где $K = \sup\limits_{0\leq t_1,t_2\leq 2\pi} |f(t_1, t_2)|$. Воспользовавшись известным [76] результатом о наилучшей квадратурной формуле на классе функций ограниченной вариации, имеем:

$$r_2 \leq 4\pi K q_1/N. \quad (2.8)$$

Из оценок (2.7), (2.8) делаем вывод о справедливости теоремы.

Следствие. Если функция $f(x_1, x_2)$ унимодальная, то справедливо утверждение предыдущей теоремы.

Рассмотрим еще один класс кубатурных формул. Обозначим через $A_{nn}f(x_1, x_2)$ некоторый аппарат аппроксимации, использующий $O(n^2)$ значений функций $f(x_1, x_2)$ и точный для полиномов степени не выше n по каждой переменной. Будем проводить вычисление интегралов по формуле

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x_1, x_2)dx_1dx_2 = \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} A_{nn}[f(x_1, x_2)]dx_1dx_2+$$

$$+\frac{4\pi^2}{N}\sum_{k=0}^{N-1} g(q_1 2k\pi/N, q_2 2k\pi/N) + R_N(f), \tag{2.9}$$

где q_1, q_2 $(q_1 \neq q_2)$– простые числа; $g(x_1, x_2) = f(x_1, x_2) - A_{nn}[f(x_1, x_2)]$.

Величины q_1, q_2, а также связь между q_1, q_2, n и N зависят от класса функций $f(x_1, x_2)$ и будут конкретизированы ниже.

Погрешность r_{nn} приближения функции $f(x_1, x_2)$ способом аппроксимации $A_{nn}f(x_1, x_2)$ равна

$$r_{nn} = \max_{(x_1,x_2)\in\Omega} |f(x_1, x_2) - A_{nn}[f(x_1, x_2)]|, \quad \Omega = [0, 2\pi]^2.$$

Теорема 2.2. Пусть $f \in \Psi = H_2^\alpha$. Погрешность кубатурной формулы (2.9) оценивается неравенством

$$R_N[\Psi] \leq A(1/(n^{2\alpha-1}q_*) + (q^*n)^\alpha N^{-\alpha} r_{nn}),$$

где $q_* = \min(q_1, q_2)$, $q^* = \max(q_1, q_2)$.

Доказательство. Оценка погрешности кубатурной формулы (2.9) складывается из двух слагаемых

$$r_1 = \left|\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} g(x_1, x_2)dx_1dx_2 - 2\pi\int_0^{2\pi} g(q_1t, q_2t)dt\right|$$

и

$$r_2 = 2\pi\left|\int_0^{2\pi} g(q_1t, q_2t)dt - \frac{2\pi}{N}\sum_{k=0}^{N-1} g\left(q_1\frac{2k\pi}{N}, q_2\frac{2k\pi}{N}\right)\right|.$$

Оценим каждое из этих слагаемых в отдельности.

При оценке выражения r_1 воспользуемся доказанной выше леммой 2.1. Нетрудно видеть, что

$$r_1 = 4\pi^2 \sum_{l,m=-\infty}^{\infty}{}' c(l,m),$$

где $c(l,m)$– соответствующий коэффициент Фурье функции $g(x_1, x_2)$; а $\sum'$ означает суммирование по l и m таким, что $lq_1 + mq_2 = 0 \quad (l,m) \neq$
$\neq (0,0)$. Очевидно, равенство $lq_1 + mq_2 = 0$ выполняется при $l = kq_2$,
$m = -kq_1$, где k пробегает всевозможные целочисленные значения. Кроме того, так как способ аппроксимации $A_{nn}f$ точен для полиномов степени не выше n по каждой переменной, коэффициенты $c(l,m) = 0$ при $|k| \leq [n/q^*]$, где $q^* = \max(q_1, q_2)$.

В монографии [52] показано, что если $f \in H_2^{\alpha}, \alpha > 1$, то $|c(n,m)| =$
$= 0((\overline{n}\,\overline{m})^{-\alpha})$.

Используя приведенную оценку, получаем:

$$\sum_{l=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty}{}' |c(l,m)| = \sum_{k=-\infty}^{\infty}{}' |c(kq_2, kq_1)| =$$

$$= O(q_1 q_2)^{-\alpha} \sum_{k=[n/q_*]+1}^{\infty} k^{-2\alpha} = O\left(\frac{1}{q_* n^{2\alpha-1}}\right),$$

где $q_* = \min(q_1, q_2)$.

Таким образом,

$$r_1 = O(1/(q_* n^{2\alpha-1})). \qquad (2.10)$$

Перейдем к оценке выражения r_2. Предварительно отметим, что, так как $|g(q_1 t, q_2 t)| = |f(q_1 t, q_2 t) - A_{nn}[f(q_1 t, q_2 t)]| \leq r_{nn}$, а $A_{nn}[f(q_1 t, q_2 t)]$– полином степени $O(q^* n)$, функция $g(q_1 t, q_2 t)$ имеет производные до порядка α, причем [62] $|g^{(\alpha)}(q_1 t, q_2 t)| \leq O((q^* n)^{\alpha}) r_{nn}$.

Теперь нетрудно видеть [39], что

$$r_2 = O((q^* n)^{\alpha} r_{nn} N^{-\alpha}). \qquad (2.11)$$

Из оценок (2.10) и (2.11) следует теорема.

3. Оптимальные по порядку кубатурные формулы на классе $\mathbf{Q}_{\mathbf{r},\gamma,\mathbf{p}}([-1,1]^{\mathbf{l}}, \mathbf{M}), \mathbf{l} \geq 2$

Рассмотрим множество кубатурных формул вида

$$\int\limits_{\Omega} f(x_1,\ldots,x_l)dx_1\ldots dx_l = \sum_{k=1}^{n}\sum_{|v|=0}^{\rho} p_{kv} f^{(v)}(M_k) + R_N(f,p_{kv},M_k), \tag{3.1}$$

где $\Omega=[-1,1]^l$, $l=2,3,\ldots$; $f^{(v)}(x)=\partial f^v(x)/\partial x_1^{v_1},\ldots,\partial x_l^{v_l}$; $v=$ $=(v_1,\ldots,v_l)$, $|v|=v_1+\ldots+v_l$.

В этом разделе строятся оптимальные по порядку кубатурные формулы вида (3.1) на классе $Q_{r,\gamma,p}(\Omega,M),\Omega=[-1,1]^l$. Для простоты γ полагается целым.

Обозначим через Δ_k множество точек $x=(x_1,\ldots,x_l)$ из Ω, расстояние $d(x,\Gamma)$ от которых до границы Γ области Ω удовлетворяет неравенствам

$$(k/N)^v \le d(x,\Gamma)=\min_{1\le i\le l}(\min(|-1-x_i|,|1-x_i|)\le ((k+1)/N)^v,$$

где $v=(s+l/q)/(s+l/q-\gamma)$, $1/p+1/q=1$.

Пусть $h_k=((k+1)/N)^v-(k/N)^v$, $k=0,1,\ldots,N-1$. Каждую область Δ_k покроем кубами $\Delta^k_{i_1,\ldots,i_l}$, грани которых параллельны координатным плоскостям, а длины ребер равны h_k. Так как в ряде случаев невозможно покрытие области Δ_k только кубами $\Delta^k_{i_1,\ldots,i_l}$, то наряду с кубами $\Delta^k_{i_1,\ldots,i_l}$ используются параллелепипеды, у которых длины ребер не меньше h_k, а грани параллельны координатным плоскостям.

Пусть $\Delta^k_{i_1,\ldots,i_l}=[b^k_{i_1},b^k_{i_1+1};\ldots;b^k_{i_l},b^k_{i_1+1}]$, $M^k_{i_1,\ldots,i_l}-$ центр тяжести куба $\Delta^k_{i_1,\ldots,i_l}$.

Интеграл $\int\limits_{\Omega} f(x)dx$ будем вычислять по кубатурной формуле

$$\int\limits_{\Omega}\int f(x_1,\ldots,x_l)dx_1\ldots dx_l =$$

$$= \sum_{i_1,\ldots,i_l}\int\limits_{\Delta^0_{i_1,\ldots,i_l}}\int T_{r-1}(f,\Delta^0_{i_1,\ldots,i_l},M^0_{i_1,\ldots,i_l})dx_1\ldots dx_l +$$

$$+\sum_{k\ge 1}\sum_{i_1,\ldots,i_l}\int\limits_{\Delta^k_{i_1,\ldots,i_l}}\int T_{s-1}(f,\Delta^k_{i_1,\ldots,i_l},M^k_{i_1,\ldots,i_l})dx_1\ldots dx_l + R_N(f). \tag{3.2}$$

Теорема 3.1. Среди всевозможных кубатурных формул вида (3.1) оптимальной по порядку на классе $Q_{r,\gamma,p}(\Omega,M)$ является формула (3.2). Ее погрешность равна

$$R_N[Q_{r,\gamma,p}(\Omega, M)] \asymp \begin{cases} n^{-(r+1/q)/(l-1)} & \text{при } v > l/(l-1), \\ n^{-s/l} & \text{при } v < l/(l-1), \\ n^{-s/l}\ln^{s/l+1/q} n & \text{при } v = l/(l-1). \end{cases} \tag{3.3}$$

Доказательство. Вначале определим погрешность кубатурной формулы (3.2). Рассмотрим произвольный куб $\Delta^k_{i_1,\ldots,i_l}$ при $k \geq 1$. Воспользовавшись формулой Тейлора с остаточным членом в интегральной форме, имеем при $k \geq 1$:

$$\sum_{k,i}\left|\int\limits_{\Delta^k_{i_1,\ldots,i_l}} \left|f(x_1,\ldots,x_l) - T_{s-1}(f,\Delta^k_{i_1,\ldots,i_l}, M^k_{i_1,\ldots,i_l})\right| dx_1\ldots dx_l\right| \leq$$

$$\leq \sum_{k,i}\frac{1}{(s-1)!}\left|\int\limits_{\Delta^k_{i_1,\ldots,i_l}} \sum_{j_1=1}^{1}\ldots\sum_{j_s=1}^{1}(x_{j_1}-b_{j_1})\ldots\right.$$

$$\left.\ldots(x_{j_s}-b_{j_s})\int\limits_0^1(1-u)^{s-1}\frac{\partial^s f(M^k_{i_1,\ldots,i_l}+u(x-M^k_{i_1,\ldots,i_l}))}{\partial x_{j_1}\ldots\partial x_{j_s}}dudx_1\ldots dx_l\right| \leq$$

$$\leq \sum_{k,i}\frac{1}{(s-1)!}\frac{1}{d^\gamma(\Delta^k,\Gamma)}\left|\int\limits_{\Delta^k_{i_1,\ldots,i_l}} \sum_{j_1=1}^{1}\ldots\sum_{j_s=1}^{1}(x_{j_1}-b_{j_1})\ldots(x_{j_l}-b_{j_l})\times\right.$$

$$\left.\times(d(\Delta^k,\Gamma))^\gamma\int\limits_0^1(1-u)^{s-1}\frac{\partial^s f(M^k_{i_1,\ldots,i_l}+u(x-M^k_{i_1,\ldots,i_l}))}{\partial x_{j_1}\ldots\partial x_{j_s}}dudx_1\ldots dx_l\right| \leq$$

$$\leq \sum_{k,i}\frac{A}{(d(\Delta^k,\Gamma))^\gamma}h_k^{s+1/q}\sum_{j_1=1}^{1}\ldots\sum_{j_l=1}^{1}\left[\int\limits_0^1\int\limits_{\Delta^k_{i_1,\ldots,i_l}}\left|\left(d(M^k_{i_1,\ldots,i_l}+(x-M^k_{i_1,\ldots,i_l}),\Gamma)\right)^\gamma\times\right.\right.$$

$$\left.\left.\times\frac{\partial^s f(M^k_{i_1,\ldots,i_l}+u(x-M^k_{i_1,\ldots,i_l}))}{\partial x_{j_1}\ldots\partial x_{j_s}}\right|^p dx_1\ldots dx_l du\right]^{1/p} \leq An^{1/q}N^{-s-1/q},$$

где $M^k_{i_1,\ldots,i_l}$– центр тяжести куба $\Delta^k_{i_1,\ldots,i_l}$, $d(\Delta^k,\Gamma)$– расстояние от множества Δ_k до границы Γ области Ω. Для простоты обозначений вместо $M^k_{i_1,\ldots,i_l}$ в ряде случаев пишем M^k.

Рассмотрим теперь интегралы по кубам $\Delta^0_{i_1,\ldots,i_l}$. Нетрудно видеть, что

$$\int\limits_{\Delta^0_{i_1,\ldots,i_l}} \left|f(x_1,\ldots,x_l) - T_{r-1}(f,\Delta^0_{i_1,\ldots,i_l},M^0_{i_1,\ldots,i_l})\right| dx_1\ldots dx_l \leq Ah_0^{r+1}.$$

Следовательно,

$$I_0 = \sum_{i_1\ldots i_l}\left|\int\limits_{\Delta^0_{i_1,\ldots,i_l}} \left|f(x_1,\ldots,x_l) - T_{r-1}(f,\Delta^0_{i_1,\ldots,i_l},M^0_{i_1,\ldots,i_l})\right| dx_1\ldots dx_l\right| \leq$$

$$\leq An_0^{1/q}N^{-v(r+1)} \leq An^{1/q}N^{-s-1/q},$$

где n_0- число кубов в слое Δ^0. Поэтому

$$|R_N(f)| \leq An^{1/q}N^{-s-1/q}.$$

Связь между n и N определяется формулой

$$n \asymp \begin{cases} N^{v(l-1)} & \text{при } v > l/(l-1),\\ N^l & \text{при } v < l/(l-1),\\ N^l\ln N & \text{при } v = l/(l-1),\end{cases} \tag{3.4}$$

доказанной в разделе 3 главы 2.

Воспользовавшись формулой (3.4), связывающей n и N, приходим к оценке погрешности кубатурной формулы (3.2), описываемой правой частью выражения (3.3).

Перейдем к оценке снизу функционала $\zeta_n(Q_{r,\gamma,p}(\Omega,M))$. Кубатурная формула (3.1) содержит n узлов. Обозначим через N число, связанное с n формулой (3.4), где $v = (s+l)/(s+l-\gamma)$. Пусть $N_1 = 2N$. Точно так же, как строилось покрытие области Ω кубами $\Delta^k_{i_1,\ldots,i_l}$, построим покрытие области Ω кубами $\bar{\Delta}^k_{i_1,\ldots,i_l}$ с длиной стороны $\overline{h}_k =$
$= ((k+1)/N_1)^v - (k/N_1)^v$. Тогда покрытие области Ω содержит, по крайней мере, $2n$ кубов $\overline{\Delta}^k_{i_1,\ldots,i_l} = [a^k_{i_1}, a^k_{a_1+1},\ldots,a^k_{i_l},a^k_{i_l+1}]$, причем в n кубах отсутствуют узлы кубатурной формулы (3.1). Обозначим эти кубы через $\overline{\Delta}^{*k}_{i_1,\ldots,i_l}$.

Пусть $\phi(x_1,\ldots,x_l)-$ функция, финитная в Ω и удовлетворяющая условию $\|\phi^{(s)}\|_{L_p(\Omega)} = 1$. Введем функцию $\phi^k_{i_1,\ldots,i_l}(x_1,\ldots,x_l)$, равную нулю, всюду, кроме $\overline{\Delta}^{*k}_{i_1,\ldots,i_l}$, а в кубе $\overline{\Delta}^{*k}_{i_1,\ldots,i_l}$ равную

$$n^{-1/p}\overline{h}_k^{s-1/p}\phi(-1+2(x_1-a^k_1)/\overline{h}_k,\ldots,-1+2(x_l-a^k_l)/\overline{h}_k).$$

Через $\phi^*(x_1,\ldots,x_l)$ обозначим функцию, определяемую формулой
$\phi^*(x_1,\ldots,x_l) = \phi^k_{i_1,\ldots,i_l}(x_1,\ldots,x_l)(N/(k+1))^{v\gamma}$ при $(x_1,\ldots,x_l) \in \overline{\Delta}^{*k}_{i_1,\ldots,i_l}$ и равную нулю в кубах, в которых имеются узлы кубатурной формулы (3.1).

Можно показать, что эта функция входит в класс $Q_{r,\gamma,p}(\Omega, M)$.

Оценим снизу величину интеграла

$$\int\limits_{\Omega}\int \phi^*(x_1,\ldots,x_l)dx_1\ldots dx_l \geq$$

$$\geq \sum_{k=0}^{N-1}\sum_{i_1,\ldots,i_l}\left(\frac{N}{k+1}\right)^{v\gamma}\overline{h}_k^{s-1/p+l}\frac{1}{n^{1/p}}\int\limits_{\Omega}\int \phi(x_1,\ldots,x_l)dx_1\ldots x_l =$$

$$= An^{1/q}N^{-s-1/q}.$$

Воспользовавшись формулой (3.4), получаем оценку снизу величины $\zeta_n(Q_{r,\gamma,p}(\Omega, M))$.

Теорема доказана.

Замечание. При $p=\infty$ теорема 3.1 опубликована в [24].

4. Кубатурные формулы на классе $\mathbf{B_{r,\gamma}(\Omega, M)}$

Будем вычислять интеграл

$$If = \int\limits_{\Omega} f(x)dx \qquad (4.1)$$

по кубатурным формулам

$$If = \sum_{k=1}^{n} p_k f(M_k) + R_n(f). \qquad (4.2)$$

Здесь $\Omega = [-1,1]^l, l\geq 2, x=(x_1,\ldots,x_l), M_k\in\Omega$.

Теорема 4.1. Пусть $\Psi = B_{r,\gamma}(\Omega, M)$. Для всевозможных кубатурных формул вида (4.2) справедлива оценка

$$\zeta_n(\Psi) \geq Cn^{-(r+2-\gamma)/(l-1)}. \qquad (4.3)$$

Доказательство. Зафиксируем целое число N, величину которого определим ниже.

Обозначим через Δ_0 множество точек $x\in\Omega$, расстояние от которых до границы Γ множества Ω удовлетворяет неравенствам

$$0 \leq d(x,\Gamma) = \min_{1\leq i\leq l}\min(\mid -1-x_i\mid, \mid 1-x_i\mid) \leq 2^{-N}.$$

Обозначим через $\Delta_k, k = 1, 2, \ldots, N$, множество точек $x \in \Omega$, расстояние от которых до границы Γ множества Ω удовлетворяет неравенствам

$$\frac{2^{k-1}}{2^N} \le d(x, \Gamma) = \min_{1 \le i \le l} \min(| -1 - x_i |, | 1 - x_i |) \le \frac{2^k}{2^N}.$$

В каждой области $\Delta_k, k = 0, 1, \ldots, N$, разместим кубы $\Delta^k_{i_1,\ldots,i_l}$ с гранями, параллельными граням куба Ω и ребрами, имеющими длину $h_k = 2^k/2^N, k = 0, 1, \ldots, N-1$. То обстоятельство, что в каждой области $\Delta_k, k = 0, 1, \ldots, N$, может оказаться 2^l параллелепипедов с гранями, параллельными граням куба Ω, не влияет на общность рассуждений. В каждом кубе $\Delta^k_{i_1,\ldots,i_l}, k = 0, 1, \ldots, N$, разместим куб $\Delta^{*k}_{i_1,\ldots,i_l}, k = 0, 1, \ldots, N$, с гранями, параллельными граням куба Ω, центр симметрии которого совпадает с центром симметрии куба $\Delta^k_{i_1,\ldots,i_l}, k = 0, 1, \ldots, N$, а длина ребра h^*_k которого равна $h^*_k = h_k/8$.

Подберем число N таким образом, чтобы число m кубов $\Delta^k_{i_1,\ldots,i_l}$, составляющих покрытие Ω, было не меньше $2n$. Так как кубатурная формула (4.2) имеет n узлов, по крайней мере, в n кубах $\Delta^k_{i_1,\ldots,i_l}$ отсутствуют узлы кубатурной формулы (4.2). Обозначим эти кубы $\overline{\Delta}^k_{i_1,\ldots,i_l}$ и назовем их отмеченными.

Обозначим через $f^*(x)$ функцию, равную нулю во всех неотмеченных кубах, а в каждом отмеченном кубе $\overline{\Delta}^k_{i_1,\ldots,i_l}$– равную функции $L^{*k}_{i_1,\ldots,i_l}(x)$, построение которой было описано в разделе 5 главы 2. Нетрудно видеть, что $f^*(x) \in B_{r,\gamma}(\Omega, M)$, а также

$$\zeta_n(B_{r,\gamma}(\Omega)) \ge \int\limits_\Omega f^*(x)dx.$$

Оценим интеграл

$$\int\limits_\Omega f^*(x)dx \ge Cn \inf_k (\int\limits_{\overline{\Delta}^k_{i_1,\ldots,i_l}} L^{*k}_{i_1,\ldots,i_l}(x)dx) \ge$$

$$\ge Cn \inf_k h_k^{r+l+1-\gamma} \ge Cn 2^{-N(r+l+1-\gamma)}.$$

Учитывая установленную в предыдущем разделе связь между m и N, имеем:

$$\zeta_n(B_{r,\gamma}(\Omega, M)) \ge Cn^{-(r+2-\gamma)/(l-1)}.$$

Теорема доказана.

Построим оптимальную по порядку кубатурную формулу.

Обозначим через Δ_0 множество точек, удовлетворяющих неравенствам $0 \le d(x,\Gamma) \le 2^{-N(r+l+1-\gamma)/(r+l)}$, через Δ_1 обозначим множество точек, удовлетворяющих неравенствам $2^{-N(r+l+1-\gamma)/(r+l)} \le d(x,\Gamma) \le$
$\le 2^{-N}$.

Пусть $N-$ целое число. Обозначим через $\Delta^k, k = 2,3,\ldots,N,$ множество точек $x \in \Omega$, удовлетворяющих неравенствам $2^{k-N} \le d(x,\Gamma) \le$
$\le 2^{k+1-N}$.

Области $\Delta^k, k = 0,1,2,\ldots,N-1$, разобьем на кубы $\Delta^k_{i_1,\ldots,i_l}$ способом, неоднократно описанным выше.

В каждом кубе $\Delta^k_{i_1,\ldots,i_l}$ функцию $f(x)$ будем аппроксимировать интерполяционным полиномом $P_{m_k,\ldots,m_k}(f,\Delta^k_{i_1,\ldots,i_l})$, построение которого описано в предыдущем разделе. Здесь $m_k = [(k(l+r+1-\gamma)+1)4M]+1$ при $k \ge 1$ и $m_0 = r$.

Локальный сплайн, составленный из интерполяционных полиномов $P_{m_k,\ldots,m_k}(f,\Delta^k_{i_1,\ldots,i_l})$ обозначим через $f_N(x)$.

Введем кубатурную формулу

$$If = \int\limits_{\Omega} f_N(x)dx + R_N(f). \tag{4.4}$$

Теорема 4.2. Среди всевозможных кубатурных формул вида (4.2) формула (4.4) является оптимальной по порядку.

Доказательство. Оценка снизу функционала $\zeta_n(B_{r,\gamma}(\Omega,M))$ была получена в теореме 4.1. Покажем, что оценка погрешности кубатурной формулы (4.4) совпадает (по порядку) с этой оценкой.

Нетрудно видеть, что

$$| R_N(f) | \le \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{i_1,\ldots,i_l} \int\limits_{\Delta^k_{i_1,\ldots,i_l}} | f(x) - f_N(x) | \, dx \le$$

$$\le \sum_{i_1,\ldots,i_l} \int\limits_{\Delta^0_{i_1,\ldots,i_l}} | f(x) - f_N(x) | \, dx + \sum_{i_1,\ldots,i_l} \int\limits_{\Delta^1_{i_1,\ldots,i_l}} | f(x) - f_N(x) | \, dx +$$

$$+ \sum_{k=2}^{N-1} \sum_{i_1,\ldots,i_l} \int\limits_{\Delta^k_{i_1,\ldots,i_l}} | f(x) - f_N(x) | \, dx = r_1 + r_2 + r_3.$$

Оценим суммы r_1 и r_2 в отдельности. Очевидно,

$$r_1 \leq n_0 \int\limits_{\Delta^0_{i_1,\ldots,i_l}} \mid f(x) - f_N(x) \mid dx \leq Cn_0 A^r r^r h_0^{r+l} \leq$$

$$\leq Cn_0 2^{-(r+l+1-\gamma)N} \leq C2^{-(r+2-\gamma)N}.$$

Здесь n_0- число кубов $\Delta^0_{i_1,\ldots,i_l}$, размещенных в области Δ^0.
Для r_3 оценка проводится сложнее

$$r_3 \leq C \sum_{k=2}^{N-1} n_k \int\limits_{\Delta^k_{i_1,\ldots,i_l}} \mid f(x) - f_N(x) \mid dx \leq$$

$$\leq C \sum_{k=1}^{N-1} M^{s_k} s_k^{s_k} n_k h_k^{s_k+l} m_k^{-s_k} (d(\Delta^k_{i_1,\ldots,i_l}, \Gamma))^{-s_k+r+1-\gamma} \ln^l m_k \leq$$

$$\leq C2^{-(r+2-\gamma)N}.$$

Здесь $d(\Delta^k_{i_1,\ldots,i_l}, \Gamma)-$ расстояние от куба $\Delta^k_{i_1,\ldots,i_l}$ до границы Γ области Ω, n_k- число кубов $\Delta^k_{i_1,\ldots,i_l}$ в области Δ^k, $s_k = [k(l+r+1-\gamma)]+1$
$(k = 2,\ldots,N)-$ число производных, используемое в оценке точности аппроксимации функции $f(x)$ локальным сплайном $f_N(x)$ в области $\Delta^k_{i_1,\ldots,i_l}, s_1 = [r+1-\gamma]$.

Сумма r_2 оценивается по формуле

$$r_2 \leq Cn_1 \int\limits_{\Delta^k_{i_1,\ldots,i_l}} \mid f(x) - f_N(x) \mid dx \leq$$

$$\leq Cn_1 M^{s_1} s_1^{s_1} h_1^{s_1+l} m_1^{-s_1} 2^{N(r+l+1-\gamma)(s_1-r_1-1-\gamma)/(r+l)} \ln^l m_1 \leq$$

$$\leq Cn_1 \left(\frac{As_1(\ln^l m_1)^{\frac{1}{2}}}{m_1}\right)^{s_1} \frac{1}{2^{N(r+l+1-\gamma)}} \leq C2^{-(r+2-\gamma)N}.$$

Очевидно,

$$r_2 \leq C2^{-N(l+r+1-\gamma)} \sum_{k=1}^{N-1} n_k \leq C2^{-N(l+r+1-\gamma)} 2^{N(l-1)} = C2^{-(r+l+1-\gamma)N}.$$

Из оценок для r_1 и r_2 следует, что $\mid R_N(f) \mid \leq C2^{-(r+2-\gamma)N}$.

Общее число функционалов n, используемое при построении локального сплайна $f_N(x)$ было оценено в разделе 5 главы 2. Оно равно $n = O(2^{N(l-1)})$. Таким образом,

$$\mid R_N(f) \mid \leq Cn^{-(r+2-\gamma)/(l-1)}.$$

Из сопоставления этой оценки с неравенством (4.3) следует справедливость теоремы.

5. Асимптотически оптимальные кубатурные формулы на классе $\mathbf{Q_r^*(\Omega, 1)}$

В предыдущем разделе были построены оптимальные по порядку кубатурные формулы вычисления интегралов на классе $Q_{r,\gamma,p}(\Omega, 1)$. В случае замены класса $Q_{r,\gamma,p}(\Omega, 1)$ на класс $Q_r^*(\Omega, 1)$ удается усилить результат и построить асимптотически оптимальную кубатурную формулу.

Определение 5.1. Пусть $\Omega = [-1, 1]^2$. Через $Q_r^*(\Omega, 1)$ обозначим класс функций, определенных на Ω и удовлетворяющих условиям

$$\max_{x\in\Omega} |f^{(v_1,v_2)}(x_1, x_2)| \le \psi_{v_1}(x_1)\psi_{v_2}(x_2),$$

где

$$\psi_v(x) = \begin{cases} 1 & \text{при } 0 \le v \le r, \\ (d(x))^{v-r} & \text{при } r < v \le 2r + 1, \end{cases}$$

где $d(x)-$ расстояние от точки x до точек ± 1.

Интеграл

$$\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} f(x_1, x_2)dx_1dx_2$$

будем вычислять по кубатурной формуле следующего вида:

$$\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} f(x_1, x_2) = \sum_{k_1=-N}^{N} \sum_{k_2=-N}^{N}{}' \sum_{l_1=0}^{\rho_1} \sum_{l_2=0}^{\rho_2} p_{k_1k_2l_1l_2} f^{(l_1,l_2)}(t_{k_1}, t_{k_2}) + R_N(f), \tag{5.1}$$

где $\sum\sum'$ означает суммирование по $k_1 \ne 0$ и $k_2 \ne 0$, узлы t_{k_i} с положительными индексами k_i расположены в сегменте $[0, 1]$, а с отрицательными $-$ в сегменте $[-1, 0], i = 1, 2$.

Приводимые ниже утверждения справедливы для интегралов любой конечной кратности. Здесь мы ограничиваемся рассмотрением двумерных интегралов только ради краткости записи.

Теорема 5.1. Пусть $\Psi = Q_r^*(\Omega, 1)$, $r = 1, 2, \ldots,$. Среди всевозможных кубатурных формул вида (5.1) при $\rho_1 = \rho_2 = 2r$ асимптотически оптимальной является формула

$$\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} f(x_1, x_2)dx_1dx_2 =$$

$$= \frac{1}{((2r+1)!)^2} \sum_{k_1=-N+1}^{N-1} \sum_{k_2=-N+1}^{N-1} \sum_{l_1=0}^{2r} \sum_{l_2=0}^{2r} p_{k_1 l_1} p_{k_2 l_2} f^{(l_1,l_2)}(v_{k_1}, v_{k_2}) + $$
$$+ R_N(f), \tag{5.2}$$

определяемая следующим набором узлов и весов: $v_{\pm k} = \pm 1 \mp ((N - -k)/N)^2$, $k = 0, 1, \ldots, N, p_{kl} = \phi^{(2r-l)}(v_k - 0) - \phi^{(2r-l)}(v_k + 0)$, где кусочно-полиномиальная функция $\phi(x)$ определена выражением (2.2) из раздела 2 предыдущей главы. Погрешность кубатурной формулы (5.2) равна

$$R_N[\Psi] = (1 + o(1))(4\rho + \rho^2),$$

где $\rho = 4R_{2r+1,1}(1)/(2r+1)(2r+1)!N^{2r+1}$.

Доказательство. Интегрированием по частям доказывается следующее тождество:

$$\int_{-1}^{1} \int_{-1}^{1} f(x_1, x_2) dx_1 dx_2 =$$

$$= \frac{1}{((2r+1)!)^2} \sum_{k_1=-N+1}^{N-1} \sum_{k_2=-N+1}^{N-1} \sum_{i_1=0}^{2r} \sum_{i_2=0}^{2r} (-1)^{i_1+i_2} p_{k_1 i_1} p_{k_2 i_2} f^{(i_1,i_2)}(v_{k_1}, v_{k_2}) -$$

$$- \sum_{i=1}^{2} \frac{1}{(2r+1)!} \int_{-1}^{1} \int_{-1}^{1} \phi(x_1) \frac{\partial^{2r+1} f(x_1, x_2)}{\partial r_i^{2r+1}} dx_1 dx_2 -$$

$$- \frac{1}{((2r+1)!)^2} \int_{-1}^{1} \int_{-1}^{1} \phi(x_1)\phi(x_2) \frac{\partial^{4r+2} f(x_1, x_2)}{\partial x_1^{2r+1} \partial x_2^{2r+1}} dx_1 dx_2. \tag{5.3}$$

Тождество (5.3) указывает на способ построения кубатурной формулы (5.2) и позволяет оценить ее погрешность.

Нетрудно видеть, что

$$|R_N(f)| \le \left| \sum_{i=1}^{2} \frac{1}{(2r+1)!} \int_{-1}^{1} \int_{-1}^{1} \phi(x_i) \frac{\partial^{2r+1} f(x_1, x_2)}{\partial x_i^{2r+1}} dx_1 dx_2 \right| +$$

$$+ \left| \frac{1}{((2r+1)!)^2} \int_{-1}^{1} \int_{-1}^{1} \phi(x_1)\phi(x_2) \frac{\partial^{4r+2} f(x_1, x_2)}{\partial x_1^{2r+1} \partial x_2^{2r+1}} dx_1 dx_2 \right| = I_1 + I_2. \tag{5.4}$$

Оценим выражение I_1. При этом можно ограничиться оценкой интеграла

$$\left| \frac{1}{(2r+1)!} \int_{-1}^{1} \int_{-1}^{1} \phi(x_1) \frac{\partial^{2r+1} f(x_1, x_2)}{\partial x_1^{2r+1}} dx_1 dx_2 \right| \le$$

$$\leq \frac{2}{(2r+1)!}\left|\int_{-1}^{1}\frac{\phi(x_1)dx_1}{(d(x_1))^{r+1}}\right|.$$

Этот интеграл был исследован в разделе 2 предыдущей главы при доказательстве теоремы 2.1. Пользуясь полученными результатами, имеем:

$$I_1 \leq (1+o(1))16R_{2r+1,1}(1)/((2r+1)!(2r+1))N^{2r+1}. \qquad (5.5)$$

Перейдем к оценке I_2

$$I_2 = \left|\frac{1}{(2r+1)!)^2}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\phi(x_1)\phi(x_2)\frac{\partial^{4r+2}f(x_1,x_2)}{\partial x_1^{2r+1}\partial x_2^{2r+1}}dx_1dx_2\right| \leq$$

$$\leq \left|\frac{1}{((2r+1)!)^2}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\frac{\phi(x_1)}{(d(x_1))^{r+1}}\frac{\phi(x_2)}{(d(x_2))^{r+1}}dx_1dx_2\right| =$$

$$= \left|\frac{1}{(2r+1)!}\int_{-1}^{1}\frac{\phi(x)dx}{|d(x)|^{r+1}}\right|^2 \leq$$

$$\leq (1+o(1))\left(\frac{4R_{2r+1,1}(1)}{(2r+1)(2r+1)!N^{2r+1}}\right)^2. \qquad (5.6)$$

Собирая вместе оценки (5.4) $-$ (5.6), имеем:

$$R_N[\Psi] \leq (1+o(1))(4\rho+\rho^2),$$

где $\rho = 4R_{2r+1,1}(1)/((2r+1)(2r+1)!N^{2r+1})$.

Докажем, что эта оценка достижима в сильной асимптотике. Обозначим через M число $M=[\ln N]$, а через $L-$ число $[N/M]$. Введем узлы $\zeta_k^i = 1-(kM/N)^2$, $\bar\zeta_k^i = -1+(kM/N)^2$, $k=0,1,\ldots,L$, $i=1,2$, $\zeta_{L+1}^i = \bar\zeta_{L+1}^i = 0$, $i=1,2$. Через w_k^i обозначим объединение узлов t_{k_i} кубатурной формулы (5.2) с точками ζ_k^i, $\bar\zeta_k^i$, $k=0,1,\ldots,L+1$, $i=1,2$. Построим функцию $\phi_i^*(x)$, принадлежащую классу $W^{2r+1}(1)$, обращающуюся в нуль вместе со своими производными до $2r$-го порядка включительно в точках w_k^i и равную нулю на сегментах $[\bar\zeta_L^i, \zeta_L^i]$. Кроме того, потребуем, чтобы $\int\limits_{\bar\zeta_k^i}^{\bar\zeta_{k+1}^i}\varphi_i^*(x)dx \geq 0$, $\int\limits_{\zeta_{k+1}}^{\zeta_k^i}\phi_i^*(x)dx \geq 0$, $k=$ $=0,1,\cdots,L-1$, $i=1,2$. Введем функцию $\psi_i(x) = \phi_i^*(x)/(1+\bar\zeta_{k+1})^{r+1}$ при $x\in[\bar\zeta_k,\bar\zeta_{k+1}]$, $k=0,1,\ldots,L-1$, $\psi_i(x)=\phi_i^*(x)/(1-\zeta_k)^{r+1}$ при

$x \in [\zeta_k, \zeta_{k-1}], k = 1, 2, \ldots, L$. В разделе 2 предыдущей главы было доказано, что $\psi(x) \in Q_r[-1, 1]$. Нетрудно видеть, что функция $\psi(x_1, x_2) = \psi_1(x_1) + \psi_2(x_2)$ принадлежит классу $Q_r^*(\Omega, 1)$.

Подставив функцию $\psi(x_1, x_2)$ в кубатурную формулу (5.1), имеем:

$$R_N[\Psi] = \int\limits_{-1}^{1}\int\limits_{-1}^{1} \psi(x_1, x_2)dx_1dx_2 = 2\int\limits_{-1}^{1} \psi_1(x_1)dx_1 + 2\int\limits_{-1}^{1} \psi_2(x_2)dx_2.$$

Интегралы $\int\limits_{-1}^{1} \psi_i(x)dx$ были оценены снизу в разделе 2 предыдущей главы, где было показано, что

$$\int\limits_{-1}^{1} \psi_i(x)dx \geq 2(1 + o(1))/4^r N^{2r+1}(2r + 1)!.$$

Следовательно, $R_N[\Psi] \geq (1 + o(1))/2^{2r-3}N^{2r+1}(2r + 1)!$. Сопоставляя приведенную оценку снизу и величину погрешности кубатурной формулы (5.2), учитывая, что $R_{2r+1,1}(1) = (2r + 1)/2^{2r+1}$, убеждаемся в справедливости теоремы.

6. Асимптотически оптимальные весовые кубатурные формулы на классах Гельдера

В случаях, когда можно в явном виде выделить множетели, «отвечающие» за поведение функции на границе области, удается построить асимптотически оптимальные кубатурные формулы на весовых классах Гельдера.

Определение 6.1. Функция $f(x_1, x_2) \in H^{\omega}_{j,\rho}(\Omega)$, $j = 1, 2, 3$, если $f(x_1, x_2)$ представима в виде $f(x_1, x_2) = \rho(x_1, x_2)\phi(x_1, x_2)$, где $\phi(x_1, x_2) \in$
$\in H^{\omega}_{j}(\Omega)$, $j = 1, 2, 3$, а $\rho(x_1, x_2)-$ весовая функция.

В качестве весовой ниже взята функция $\rho(x_1, x_2) = (d(x, \Gamma))^{-\gamma}, 0 \leq$ $\leq \gamma < 1$, где $d(x, \Gamma)-$ расстояние от точки $x = (x_1, x_2)$ до границы Γ области Ω, вычисляемое по формуле

$$d(x, \Gamma) = \min_{1 \leq i \leq 2} \min(|-1 - x_i|, |1 - x_i|),$$

а $w(t) = t^{\alpha}$. Пусть двойной интеграл вычисляется по формуле

$$\int\limits_{-1}^{1}\int\limits_{-1}^{1} \rho(x_1, x_2)\phi(x_1, x_2)dx_1dx_2 = \sum_{k=1}^{n} p_k f(M_k) + R_n(f, p_k, M_k), \quad (6.1)$$

где $M_k \in [-1,1]^2-$ узлы, а p_k- веса.

Теорема 6.1. Пусть $\rho(x_1,x_2) = (d(x,\Gamma))^{-\gamma}$, $0 \le \gamma < 1$. Справедлива оценка

$$\zeta_N[H^\alpha_{i,\rho}] \ge (1+o(1))D_i n^{-\alpha/2}\left[\int\limits_\Omega\int (\rho(x_1,x_2))^{2/(2+\alpha)}dx_1dx_2\right]^{(2+\alpha)/2},$$

где $D_1 = 2^{1-\alpha}/(2+\alpha)$, $D_2 = 2^{1-\alpha/2}/(2+\alpha)$,
$D_3 = \frac{12}{2+\alpha}\left(\frac{1}{2\sqrt{3}}\right)^{(2+\alpha)/2}\int\limits_0^{\pi/6}\cos^{-2-\alpha} tdt.$

Замечание.

$$\left[\int\limits_\Omega\int\left(\rho(x_1,x_2)\right)^{2/(2+\alpha)}dx_1dx_2\right]^{(2+\alpha)/2} =$$

$$= (2+\alpha)^{2+\alpha}2^{2+\alpha}\left((2+\alpha-2\gamma)(2+\alpha-\gamma)\right)^{-(2+\alpha)/2}.$$

Доказательство. В работе [9] показано, что при неотрицательной ограниченной весовой функции $\rho_0(x_1,x_2)$ справедлива оценка

$$\zeta_N[H^\alpha_{j,\rho_0}] = (1+o(1))D_j n^{-\alpha/2}\left[\int\limits_\Omega\int[\rho_0(x_1,x_2)]^{2/(2+\alpha)}dx_1dx_2\right]^{(2+\alpha)/2},$$

где $j=1,2,3$. Из этого утверждения и леммы С. А. Смоляка следует, что для каждого $i=1,2,3$ существует функция $\phi^*_i(x_1,x_2) \in H^\alpha_i$ обращающаяся в нуль в узлах кубатурной формулы (6.1) и такая, что

$$\int\limits_\Omega\int \rho_0(x_1,x_2)\phi^*_j(x_1,x_2)dx_1dx_2 \ge$$

$$\ge (1+o(1))D_j n^{-\alpha/2}\left[\int\limits_\Omega\int \rho_0(x_1,x_2)^{2/(2+\alpha)}dx_1dx_2\right]^{(2+\alpha)/2}.$$

Введем весовую функцию $\rho_\delta(x_1,x_2)$, определяемую формулой:

$$\rho_\delta(x_1,x_2) = \begin{cases} \rho(x_1,x_2) & \text{при } (x_1,x_2) \in \Omega_\delta, \\ \delta^{-\gamma} & \text{при } (x_1,x_2) \in \Omega\setminus\Omega_\delta, \end{cases}$$

где $\Omega_\delta = [-1+\delta, 1-\delta; -1+\delta, 1-\delta]$.

Нетрудно видеть, что для любого как угодно малого ε $(\varepsilon > 0)$ найдется такое δ, что

$$\left|\left[\int\limits_\Omega\int \rho(x_1,x_2)^{2/(2+\alpha)}dx_1dx_2\right]^{(2+\alpha)/2} -\right.$$

$$-\left[\int\limits_{\Omega}\int \rho_\delta(x_1,x_2)^{2/(2+\alpha)}dx_1dx_2\right]^{(2+\alpha)/2}\Bigg| \le \varepsilon.$$

Тогда существуют функции $\phi_i^*(x_1,x_2)$ $(i=1,2,3)$, такие, что

$$\int\limits_{\Omega}\int \rho(x_1,x_2)\phi_i^*(x_1,x_2)dx_1dx_2 \ge$$

$$\ge \int\limits_{\Omega}\int \rho_\delta(x_1,x_2)\phi_i^*(x_1,x_2)dx_1dx_2 - 16\delta^{1-\gamma}/(1-\gamma) \ge$$

$$\ge (1+o(1))\frac{D_i}{n^{\alpha/2}}\left[\int\limits_{\Omega}\int \rho_\delta(x_1,x_2)^{2/(2+\alpha)}dx_1dx_2\right]^{(2+\alpha)/2} - 16\delta^{1-\gamma}/(1-\gamma) \ge$$

$$\ge (1+o(1))\frac{D_i}{n^{\alpha/2}}\left[\int\limits_{\Omega}\int \rho(x_1,x_2)^{2/(2+\alpha)}dx_1dx_2 - \varepsilon\right]^{(2+\alpha)/2} - 16\delta^{1-\gamma}/(1-\gamma) =$$

$$= (1+o(1))D_in^{-\alpha/2}\left[\int\limits_{\Omega}\int \rho(x_1,x_2)^{2/(2+\alpha)}dx_1dx_2\right]^{(2+\alpha)/2}.$$

Здесь предполагаются ε и δ настолько малыми, что справедливы проведенные выкладки.

Теорема доказана.

Построим асимптотически оптимальные кубатурные формулы. Пусть $\phi \in H^{\alpha}_{1,\rho}, N-$ целое число. Обозначим через Δ^k множество точек $x=(x_1,x_2)$ из Ω, расстояние от которых до границы Γ области Ω удовлетворяет неравенствам

$$(k/N)^v \le d(x,\Gamma) \le ((k+1)/N)^v,$$

где $v=(2+\alpha)/(2+\alpha-\gamma)$.

В каждой области Δ^k разместим прямоугольники Δ^k_{ij} со сторонами, параллельными координатным осям. У каждого из этих прямоугольников длина одной стороны равна $h_k=((k+1)/N)^v-(k/N)^v$, а второй меньше или равна h_k, причем в каждой области Δ^k может быть не более четырех прямоугольников, у которых одна сторона меньше h_k.

Интеграл будем вычислять по кубатурной формуле

$$\int\limits_{\Omega}\int \rho(x_1,x_2)f(x_1,x_2)dx_1dx_2 =$$

$$= \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{i,j} f(M_{i,j}^k) \int\limits_{\Delta_{ij}} \int \rho(x_1, x_2) dx_1 dx_2 + R_n(f), \qquad (6.2)$$

где $\Delta_{ij}^k = [a_i^k, a_{i+1}^k; b_j^k, b_{j+1}^k]$, $M_{ij}^k = ((a_{i+1}^k + a_i^k)/2; (b_{j+1}^k + b_j^k)/2)$, а суммирование проводится по кубам Δ_{ij}^i, общее число которых равно n.

Оценим погрешность кубатурной формулы (6.2). Нетрудно видеть, что

$$R_N[H_{1,\rho}^\alpha] = \sup_{f \in H_1^\alpha} \left| \int\limits_\Omega \int \rho(x_1, x_2) f(x_1, x_2) dx_1 dx_2 - \right.$$

$$\left. - \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{ij} f(M_{ij}^k) \int\limits_{\Delta_{ij}^k} \int \rho(x_1, x_2) dx_1 dx_2 \right| \le$$

$$\le \left| \sum_{ij} \sup \left[\int\limits_{\Delta_{ij}^0} \int \rho(x_1, x_2) f(x_1, x_2) dx_1 dx_2 - f(M_{ij}^0) \int\limits_{\Delta_{ij}^0} \int \rho(x_1, x_2) dx_1 dx_2 \right] \right| +$$

$$+ \left| \sum_{k=1}^{N-1} \sum_{ij} \sup \left[\int\limits_{\Delta_{ij}^k} \int \rho(x_1, x_2) f(x_1, x_2) dx_1 dx_2 - \right. \right.$$

$$\left. \left. - f(M_{ij}^k) \int\limits_{\Delta_{ij}^k} \int \rho(x_1, x_2) f(x_1, x_2) dx_1 dx_2 \right] \right| = I_1 + I_2.$$

Оценим в отдельности суммы I_1 и I_2 :

$$I_1 \le \sum_{ij} \sup \left[\max_{(x_1, x_2) \in \Delta_{ij}^0} \left| f(x_1, x_2) - f(M_{ij}^0) \right| \int\limits_{\Delta_{ij}^0} \int \rho(x_1, x_2) dx_1 dx_2 \right] \le$$

$$\le \sum_{ij} \left(\frac{h_0}{2} \right)^\alpha \int\limits_{\Delta_{ij}^0} \int \rho(x_1, x_2) dx_1 dx_2 \le \left(\frac{h_0}{2} \right)^\alpha \int\limits_\Omega \int \rho(x_1, x_2) dx_1 dx_2 \le$$

$$\le \frac{1}{2^\alpha} \left(\frac{1}{N} \right)^{(2+\alpha)\alpha/(2+\alpha-\gamma)} \int\limits_\Omega \int \rho(x_1, x_2) dx_1 dx_2 = o(n^{-\alpha/2}),$$

$$I_2 \le \sum_{k=1}^{N-1} \sum_{ij} \left(\frac{N}{k} \right)^{v\gamma} \sup_{f \in H_1^\alpha} \int\limits_{\Delta_{ij}^k} \int \left| f(x_1, x_2) - f(M_{ij}^k) \right| dx_1 dx_2 \le$$

$$\leq \sum_{k=1}^{N-1} \sum_{ij} \left(\frac{N}{k}\right)^{v\gamma} 8 \int\limits_0^{h_k/2} \int\limits_0^{x_1} x_1^\alpha dx_1 dx_2 \leq$$

$$\leq \sum_{k=1}^{N-1} \sum_{ij} \left(\frac{N}{k}\right)^{v\gamma} \frac{8}{2+\alpha} \left(\frac{h_k}{2}\right)^{2+\alpha} = \sum_{k=1}^{L} \sum_{ij} \left(\frac{N}{k}\right)^{v\gamma} \frac{8}{2+\alpha} \left(\frac{h_k}{2}\right)^{2+\alpha} +$$

$$+ \sum_{k=L+1}^{N-1} \sum_{ij} \left(\frac{N}{k}\right)^{v\gamma} \frac{8}{2+\alpha} \left(\frac{h_k}{2}\right)^{2+\alpha} = I_{21} + I_{22},$$

где $L = [\ln N]$.

Прежде чем оценивать сумму I_{21} заметим, что число n_k квадратов Δ_{ij}^k, расположенных в области Δ^k, при $k \geq 1$ равно:

$$n_k = 4\frac{2 - ((k+1)/N)^v - (k/N)^v}{((k+1)/N)^v - (k/N)^v} = 4\frac{2N^v - (k+1)^v - k^v}{(k+1)^v - k^v} \leq$$

$$\leq \frac{8}{v}\frac{N^v - k^v}{(k+\theta)^{v-1}} \leq \frac{8}{v}\frac{N^v}{k^{v-1}} - \frac{8}{v}\frac{k^v}{(k+1)^{v-1}}. \tag{6.3}$$

При этом общее число квадратов Δ_{ij}^k, размещенных в области Ω :

$$n = (1 + o(1))4N^2/(2 - v). \tag{6.4}$$

Поэтому

$$I_{21} = \sum_{k=1}^{L} \sum_{ij} \left(\frac{N}{k}\right)^{v\gamma} \frac{8}{2+\alpha}\frac{1}{2^{2+\alpha}} \left(\left(\frac{k+1}{N}\right)^v - \left(\frac{k}{N}\right)^v\right)^{2+\alpha} \leq$$

$$\leq (1+o(1))\frac{v^{2+\alpha}}{N^{2+\alpha}}\frac{2^{1-\alpha}}{2+\alpha} \sum_{k=1}^{L} \frac{8}{v}\frac{1}{k^{v-1}} \left(\frac{k+\theta}{k}\right)^{(v-1)(2+\alpha)} \leq$$

$$\leq (1+o(1))\frac{v^{1+\alpha}2^{4-\alpha}2^{(v-1)(2+\alpha)}}{N^{2+\alpha}} \sum_{k=1}^{L} \frac{1}{k^{v-1}} \leq \frac{AL^{2-v}}{N^{2+\alpha}} = o(N^{-\alpha}) = o(n^{-\alpha/2}).$$

Нетрудно видеть, что

$$I_{22} = \sum_{k=L+1}^{N-1} \sum_{ij} \left(\frac{N}{k}\right)^{v\gamma} \frac{2^{1-\alpha}}{2+\alpha} \left(\left(\frac{k+1}{N}\right)^v - \left(\frac{k}{N}\right)^v\right)^{2+\alpha} \leq$$

$$\leq \frac{2^{1-\alpha}}{2+\alpha}\frac{v^{2+\alpha}}{N^{2+\alpha}} \sum_{k=L+1}^{N-1} \sum_{ij} \left(\frac{k+\theta}{k}\right)^{(v-1)(2+\alpha)} \leq$$

$$\leq \frac{2^{1-\alpha}}{2+\alpha}\left(\frac{2+\alpha}{2+\alpha-\gamma}\right)^{2+\alpha}\frac{n}{N^{2+\alpha}}\left(1+\frac{1}{L}\right)^{(v-1)(2+\alpha)} =$$

$$= \frac{(1+o(1))8}{2+\alpha}\left(\frac{2+\alpha}{2+\alpha-\gamma}\right)^{2+\alpha}\frac{1}{(2-v)^{1+\alpha/2}}\frac{1}{n^{\alpha/2}}.$$

Из оценок I_1, I_{21}, I_{22} следует неравенство

$$R_N[H^\alpha_{1,\rho}] \leq \frac{(1+o(1))8}{2+\alpha}\left(\frac{2+\alpha}{2+\alpha-\gamma}\right)^{2+\alpha}\frac{1}{(2-v)^{1+\alpha/2}}\frac{1}{n^{\alpha/2}}. \qquad (6.5)$$

Из сопоставления утверждений теоремы 6.1 и оценки (6.5) вытекает утверждение.

Теорема 6.2. Среди всевозможных кубатурных формул вида (6.1) асимптотически оптимальной на классе функций $H^\alpha_{1,\rho}$ $(0 < \alpha \leq 1)$ является формула (6.2). Ее погрешность равна

$$R_N[H^\alpha_{1,\rho}] \leq (1+o(1))\frac{8}{2+\alpha}\left(\frac{2+\alpha}{2+\alpha-\gamma}\right)^{2+\alpha}\frac{1}{(2-v)^{1+\alpha/2}n^{\alpha/2}},$$

где $v = (2+\alpha)/(2+\alpha-\gamma)$.

Пусть $\phi \in H^\alpha_{2,\rho}$. Введем обозначения $L = [\ln N], M = [N/L]$. Обозначим через Δ^k множество точек $x = (x_1, x_2) \in \Omega$, расстояние от которых до границы Γ области Ω удовлетворяет неравенствам $(k/M)^v \leq$
$\leq d(x,\Gamma) \leq ((k+1)/M)^v, k = 0, 1, \ldots, M-1$. Каждому значению k $(0 \leq k \leq M-1)$ поставим в соответствие множество узлов

$$(\zeta^k_i, \eta^k_j) = \left(-1 + \left(\frac{k}{M}\right)^v + \frac{ih_k}{L}, -1 + \left(\frac{k}{M}\right)^v + \frac{jh_k}{L}\right);$$

$$(\zeta^{1,k}_i, \eta^{1,k}_j) = \left(-1 + \left(\frac{k}{M}\right)^v + h_k\frac{2i+1}{2L}, -1 + \left(\frac{k}{M}\right)^v + h_k\frac{2j+1}{2L}\right),$$

где $h_k = ((k+1)/M)^v - (k/M)^v$, $k = 0, 1, \ldots, M-1$; $i, j = 0, 1, \ldots, L-1$.

Обозначим через $\{\zeta^{*k}_i, \eta^{*k}_j\}, \{\zeta^{*1k}_i, \eta^{*1k}_j\}$ те узлы из множеств узлов $\{\zeta^k_i, \eta^k_j\}, \{\zeta^{1k}_i, \eta^{1k}_j\}$, которые лежат в областях Δ^k.

Обозначим через q^{*k}_{ij} и q^{*1k}_{ij} области, определяемые неравенствами $|x_1 - \zeta^{*k}_i| + |x_2 - \eta^{*k}_j| \leq h_k/2L$, $\quad |x_1 - \zeta^{*1k}_i| + |x_2 - \eta^{*1k}_j| \leq h_k/2L$, через s^{*k}_{ij} и s^{*1k}_{ij}– области $s^{*k}_{ij} = q^{*k}_{ij} \cap \Delta^k, s^{*1k}_{ij} = q^{*1k}_{ij} \cap \Delta^k$.

Рассмотрим кубатурную формулу

$$\int\limits_\Omega\int \rho(x_1,x_2)f(x_1,x_2)dx_1dx_2 =$$

$$= \sum_{k=0}^{M-1} \sum_{i,j} \left[f(\zeta_i^{*k}, \eta_j^{*k}) \int\limits_{s_{ij}^{*k}} \int \rho(x_1, x_2) dx_1 dx_2 + \right.$$

$$\left. + f(\zeta_i^{*1k}, \eta_j^{*1k}) \int\limits_{s_{ij}^{*1k}} \int \rho(x_1, x_2) dx_1 dx_2 \right] + R_n(f), \qquad (6.6)$$

где суммирование проводится по областям $s_{ij}^{*k}, s_{ij}^{*1k}$, общее число которых не превосходит n.

Оценим погрешность кубатурной формулы (6.6). Нетрудно видеть, что

$$R_n[H_{2,\rho}^{\alpha}] = \sup_{f \in H_2^{\alpha}} \left| \int\limits_{\Omega} \int \rho(x_1, x_2) f(x_1, x_2) dx_1 dx_2 - \right.$$

$$- \sum_{k=0}^{M-1} \sum_{i,j} \left(f(\zeta_i^{*k}, \eta_j^{*k}) \int\limits_{s_{ij}^{*k}} \int \rho(x_1, x_2) dx_1 dx_2 + \right.$$

$$\left. \left. + \, f(\zeta_i^{*1k}, \eta_j^{*1k}) \int\limits_{s_{ij}^{*1k}} \int \rho(x_1, x_2) dx_1 dx_2 \right) \right| \leq$$

$$\leq 2 \sup_{f \in H_2^{\alpha}} \left| \sum_{i,j} \left[\int\limits_{s_{ij}^{*0}} \int \rho(x_1, x_2) f(x_1, x_2) dx_1 dx_2 - \right. \right.$$

$$\left. \left. - f(\zeta_i^{*0}, \eta_j^{*0}) \int\limits_{s_{ij}^{*0}} \int \rho(x_1, x_2) dx_1 dx_2 \right] \right| +$$

$$+ 2 \sup_{f \in H_2^{\alpha}} \left| \sum_{k=1}^{M-1} \sum_{i,j} \left[\int\limits_{s_{i,j}^{*k}} \int \rho(x_1, x_2) f(x_1, x_2) dx_1 dx_2 - \right. \right.$$

$$\left. \left. - f(\zeta_i^{*k}, \eta_j^{*k}) \int\limits_{s_{ij}^{*k}} \rho(x_1, x_2) dx_1 dx_2 \right] \right| = I_3 + I_4.$$

Оценим каждое из выражений I_3 и I_4 в отдельности

$$I_3 \leq 2 \sup_{f \in H_2^{\alpha}} \sum_{i,j} \left(\max_{(x_1, x_2) \in s_{ij}^{*0}} |f(x_1, x_2) - f(\zeta_i^{*0}, \eta_j^{*0})| \int\limits_{s_{ij}^{*0}} \int \rho(x_1, x_2) dx_1 dx_2 \right) \leq$$

$$\le 2^{2-\alpha}\left(\frac{h_0}{L}\right)^{\alpha}\sum_{i,j}\int\limits_{s^{*0}_{ij}}\int\rho(x_1,x_2)dx_1dx_2\le$$

$$\le\left(\frac{1}{M}\right)^{v\alpha}\frac{1}{L^{\alpha}}=\frac{1}{N^{\alpha}M^{(v-1)\alpha}}=\frac{1}{N^{\alpha}M^{\alpha\gamma/(r+\alpha-\gamma)}}=o(N^{-\alpha})=o(n^{-\alpha/2});$$

$$I_4\le 2\sum_{k=1}^{M-1}\sum_{i,j}\sup_{f\in H_2^{\alpha}}\left|\int\limits_{s^{*k}_{ij}}\int\rho(x_1,x_2)(f(x_1,x_2)-f(\zeta_i^{*k};\eta_j^{*k}))dx_1dx_2\right|\le$$

$$\le 2\sum_{k=1}^{M-1}\left(\frac{M}{k}\right)^{v\gamma}\sum_{ij}\int\limits_{s^{*k}_{ij}}\int\left|f(x_1,x_2)-f(\zeta_i^{*k},\eta_j^{*k})\right|dx_1dx_2\le$$

$$\le\frac{8}{2+\alpha}\sum_{k=1}^{M-1}\left(\frac{M}{k}\right)^{v\gamma}\left(\frac{h_k}{2L}\right)^{2+\alpha}m_k=\frac{8}{2+\alpha}\sum_{k=1}^{L-1}\left(\frac{M}{k}\right)^{v\gamma}\left(\frac{h_k}{2L}\right)^{2+\alpha}m_k+$$

$$+\frac{8}{2+\alpha}\sum_{k=l}^{M-1}\left(\frac{M}{k}\right)^{v\gamma}\left(\frac{h_k}{2L}\right)^{2+\alpha}m_k=I_5+I_6,$$

где m_k- число кубов s^k_{ij}, расположенных в области Δ^k.

Повторяя вывод формулы (6.3), имеем:

$$m_k=(1+o(1))\frac{8}{v}L^2\left(\frac{M^v}{k^{v-1}}-k\right). \tag{6.7}$$

При этом общее число кубов s^k_{ij}, s^{1k}_{ij}, покрывающих область Ω, равно $n=(1+o(1))\dfrac{8}{2-v}N^2$.

Подставляя (6.7) в выражение I_5, приходим к оценке:

$$I_5=O(M^{v-2-\alpha}L^{2-v-\alpha})=o(N^{-\alpha})=o(n^{-\alpha/2}).$$

Приступим к оценке I_6

$$I_6=\frac{8}{2+\alpha}\sum_{k=L}^{M-1}\left(\frac{M}{k}\right)^{v\gamma}\left(\frac{h_k}{2L}\right)^{2+\alpha}m_k\le$$

$$\le\frac{8}{2+\alpha}\frac{v^{2+\alpha}}{(2N)^{2+\alpha}}\sum_{k=L}^{M-1}\left(\frac{k+\theta}{k}\right)^{v\gamma}m_k\le\frac{1+o(1)}{2+\alpha}2^{1-\alpha}\left(\frac{v}{N}\right)^{2+\alpha}\frac{n}{2}=$$

$$=\frac{(1+o(1))2^{3+\alpha/2}(2+\alpha)^{1+\alpha}}{((2+\alpha-\gamma)(2+\alpha-2\gamma))^{(2+\alpha)/2}n^{\alpha/2}}.$$

Собирая оценки $I_3 - I_6$, имеем:

$$R_N[H^{\alpha}_{2,\rho}] \leq \frac{(1+o(1))2^{3+\alpha/2}(2+\alpha)^{1+\alpha}}{((2+\alpha-\gamma)(2+\alpha-2\gamma))^{(2+\alpha)/2}n^{\alpha/2}}.$$

Из этого неравенства и теоремы 6.1 следует справедливость утверждения.

Теорема 6.3. Среди всевозможных кубатурных формул вида (6.1) асимптотически оптимальной на классе функций $H^{\alpha}_{2,\rho}$ $(0 < \alpha \leq 1)$ является формула (6.6) с погрешностью

$$R_n[H^{\alpha}_{2,\rho}] = \frac{(1+o(1))2^{2+\alpha/2}(2+\alpha)^{1+\alpha}}{((2+\alpha-\gamma)(2+\alpha-2\gamma))^{(2+\alpha)/2}n^{\alpha/2}}.$$

7. Адаптивные алгоритмы вычисления интегралов на классе $\mathbf{Q_{r,\gamma,p}([-1,1]^l, M), l \geq 2}$

В разделе 5 построены оптимальные по порядку пассивные алгоритмы вычисления интегралов на классах $Q_{r,\gamma,p}(\Omega, M), \Omega = [-1,1]^l, l \geq$
≥ 2. Представляют интерес построение адаптивных алгоритмов на этих классах и сравнение точности пассивных и адаптивных алгоритмов.

Задача построения адаптивных алгоритмов вычисления интегралов вида $I\phi = \int\limits_{\Omega} \phi(x)dx$, $x = (x_1, \dots, x_l)$ на классе $Q_{r,\gamma,p}(\Omega, M)$ заключается в следующем. Область последовательно разбивается на более мелкие области $\Delta^k_{i_1,\dots,i_l}$. В каждой области разбиения интеграл вычисляется по одной и той же кубатурной формуле. Необходимо построить алгоритм последовательного разбиения области Ω на более мелкие области так, чтобы в результате его использования в каждой из областей разбиения погрешность вычисления интеграла была бы величиной одного порядка.

Теорема 7.1. Пусть $f(x) \in Q_{r,\gamma,p}(\Omega, M), \Omega = [-1,1]^l$, $l \geq 2$, $p >$
$> \max(l/s, 2l/(s+l))$. Существует адаптивный алгоритм вычисления интегралов вида $I\phi$, использующий значения подынтегральной функции и ее производных до $(s-1)$-го порядка в n узлах и имеющий погрешность

$$R_n(f) \le$$

$$\le A \begin{cases} n^{-s/l} & \text{при } w < 1, v < l/(l-1), \\ n^{-s/l} & \text{при } w = 1, v < l/(l-1), \\ u < 1, & \\ n^{-s/l}(\ln n)^{s(1/l-1/(p(s+l)-l)} & \text{при } w = 1, v < l/(l-1), \\ u = l, & \\ n^{-(s-\gamma+1-l/(p(s+l)-l))/(l-1+l/(p(s+l)-l))}\times & \\ \times(\ln n)^{(s+l-\gamma)(p(s+l)-2l)/((l-1)(p(s+l)-l)+l)} & \text{при } w = 1, v < l/(l-1), \\ u > 1, & \\ n^{-(s+l-\gamma+l/(p(s+l)-l))/(l-1+l/(p(s+l)-l))} & \text{при } w > 1, v \ge l/(l-1), \\ n^{-(s+l-\gamma+l/(p(s+l)-l))/(l-1+l/(p(s+l)-l))} & \text{при } w > 1, v < l/(l-1), \\ u \ge 1, & \\ n^{-s/l} & \text{при } w > 1, v < l/(l-1), \\ u < 1, & \end{cases}$$

где $w = (v-1)(l-1+l^2/(p(s+l)-2l))$, $u = v(l-1+l/(p(s+l)-1))$, $v = (s+l)/(s+l-\gamma)$.

Доказательство. Обозначим через Δ_k $(k = 0, 1, \dots, N-1)$ множество точек $x = (x_1, \dots, x_l)$ из Ω, расстояние от которых до границы Γ области Ω удовлетворяет неравенствам

$$\left(\frac{k}{N}\right)^v \le d(x, \Gamma) \le \left(\frac{k+1}{N}\right)^v,$$

где $v = (s+l)/(s+l-\gamma)$.

В каждом из множеств Δ_k разместим кубы $\Delta^k_{i_1,\dots,i_l}$ со сторонами, длины которых равны $h_k = ((k+1)/N)^v - (k/N)^v$. То обстоятельство, что в каждом из множеств Δ_k может оказаться 2^l параллелепипедов, у которых длины нескольких сторон равны h_k, а длины остальных меньше h_k, не влияет на дальнейшие рассуждения.

Обозначим через $P_s(\phi, [-1, 1])$ интерполяционный полином степени $s-1$, построенный по s узлам полинома Чебышева первого рода, через $P_s(\phi, [a, b])$ обозначим интерполяционный полином, полученный из $P_s(\phi, [-1, 1])$ при отображении сегмента $[-1, 1]$ на $[a, b]$.

Через $P_s(\phi, \Delta^k_{i_1,\dots,i_l})$ обозначим интерполяционный полином $P_s(\phi, \Delta^k_{i_1,\dots,i_l}) = P_s^{x_1} \dots P_s^{x_l}(\phi, \Delta^k_{i_1,\dots,i_l})$. Здесь верхний индекс x_j означает переменную, по которой проводится интерполяция.

Нетрудно видеть, что для введенного выше интерполяционного полинома $P_s(\phi, \Delta^k_{i_1,\dots,i_l})$ справедливо неравенство

$$\|\phi - P_s(\phi, \Delta^k_{i_1,\dots,i_l})\| = \|\phi - P_{\Delta^k_{i_1,\dots,i_l}}(\phi, \Delta^k_{i_1,\dots,i_l})+$$

$$+P_s\left(\phi - P_{\Delta^k_{i_1,\dots,i_l}}(\phi, \Delta^k_{i_1,\dots,i_l})\right)\|_C \le$$

$$\le A(1+\ln s)^l (\mathrm{mes}\Delta^k_{i_1,\dots,i_l})^{s/l-1/p}\|\phi\|_{L^s_p(\Delta^k_{i_1,\dots,i_l})} \le$$

$$\le A(\mathrm{mes}\Delta^k_{i_1,\dots,i_l})^{s/l-1/p}\|\phi\|_{L^s_p(\Delta^k_{i_1,\dots,i_l})}.$$

Здесь через $P_{\Delta^k_{i_1,\dots,i_l}}$ обозначен оператор, введенный в разделе 3 главы 1.

Аппроксимируем функцию $\phi(x)$ в кубах $\Delta^0_{i_1,\dots,i_l}$ полиномом $P_m(\phi, \Delta^k_{i_1,\dots,i_l})$, где $m = r$ при γ целом и $m = r+1$ при γ нецелом.

Нетрудно видеть, что

$$\int\limits_{\Delta^0_{i_1,\dots,i_l}} \left|\phi(x) - P_m(\phi, \Delta^0_{i_1,\dots,l_l})\right| dx \le h_0^{r+l+1-\mu} = AN^{-s-l}.$$

Перейдем к вычислению интегралов

$$\int\limits_{\Delta^k_{i_1,\dots,i_l}} \phi(x)dx$$

при $k \ge 1$. Воспользовавшись утверждением леммы 3.4 из главы 1, имеем:

$$\int\limits_{\Delta^k_{i_1,\dots,i_l}} \left|\phi(x) - P_s(\phi, \Delta^k_{i_1,\dots,i_l})\right| dx \le Ah_k^{l(s/l+1/p')}\|\phi\|_{L^s_p(\Delta^k_{i_1,\dots,i_l})} \le$$

$$\le Ah_k^{(sp'+l)/p'}\|\phi\|_{L^s_p(\Delta^k_{i_1,\dots,i_l})} \le Ah_k^{(sp'+l)/p'}\phi(\Delta^k_{i_1,\dots,i_l}),$$

где $1/p + 1/p' = 1,\ \phi(\Delta^k_{i_1,\dots,i_l}) = \|\phi\|_{L^s_p(\Delta^k_{i_1,\dots,i_l})}$.

Пусть $\phi(\Delta^k_{i_1,\dots,i_l}) = m^k_{i_1,\dots,i_l} h_k^{l/p}(N/(k+1))^{v\gamma}$.

Рассмотрим две возможности: 1) $m^k_{i_1,\dots,i_l} \le 1$; 2) $m^k_{i_1,\dots,i_l} > 1$.

В первом случае

$$\int\limits_{\Delta^k_{i_1,\dots,i_l}} \int \left|\phi(x) - P_s(\phi, \Delta^k_{i_1,\dots,i_l})\right| dx \le Ah_k^{s+l}(N/(k+1))^{v\gamma} \le AN^{-s-l}.$$

Перейдем ко второму случаю. Разделим каждую из сторон куба $\Delta^k_{i_1,\ldots,i_l}$ на $n^k_{i_1,\ldots,i_l} = \left[\left(m^k_{i_1,\ldots,i_l}\right)^{p'/(sp'+l)}\right]$ равных частей. В полученных в результате разбиения кубах, которые обозначим через $\Delta^k_{i_1,\ldots,i_l;j_1,\ldots,j_l}$, будем вычислять интеграл по формуле

$$\int\limits_{\Delta^k_{i_1,\ldots,i_l;j_1,\ldots,j_l}}\int \phi(x)dx = \int\limits_{\Delta^k_{i_1,\ldots,i_l;j_1,\ldots,j_l}}\int P_s(\phi,\Delta^k_{i_1,\ldots,i_l;j_1,\ldots,j_l})dx+$$

$$+R(\phi,\Delta^k_{i_1,\ldots,i_l;j_1,\ldots,j_l}),$$

погрешность которой оценивается неравенством

$$\left|R(\phi,\Delta^k_{i_1,\ldots,i_l;j_1,\ldots,j_l})\right| \le A\left(\frac{h_k}{n^k_{i_1,\ldots,i_l}}\right)^{(sp'+l)/p'} m^k_{i_1,\ldots,i_l} h_k^{l/p}\left(\frac{N}{k+1}\right)^{v\gamma} \le AN^{-s-l}.$$

Оценим величину $\sum\limits_k\sum\limits_{i_1,\ldots,i_l} n^k_{i_1,\ldots,i_l}$, полагая, что в кубах, в которых $m^k_{i_1,\ldots,i_l} \le 1$, величина $n^k_{i_1,\ldots,i_l}$ равна единице.

Нетрудно видеть, что

$$\sum_{k=0}^{N-1}\sum_{i_1,\ldots,i_l}(m^k_{i_1,\ldots,i_l})^p h_k^l = \sum_{k=0}^{N-1}\sum_{i_1,\ldots,i_l}(\phi(\Delta^k_{i_1,\ldots,i_l}))^p((k+1)/N)^{pv\gamma} =$$

$$= \sum_{k=0}^{N-1}\sum_{i_1,\ldots,i_l}\left(\frac{k+1}{N}\right)^{pv\gamma}\sum_{|\alpha|=s}\int\limits_{\Delta^k_{i_1,\ldots,i_l}}\int |D^\alpha\phi(x)|^p\,dx \le$$

$$\le 2\sum_{k=0}^{N-1}\sum_{i_1,\ldots,i_l}\sum_{|\alpha|=s}\int\limits_{\Delta^k_{i_1,\ldots,i_l}}\int |d^\gamma(x,\Gamma)D^\alpha(\phi(x))|^p\,dx \le 2.$$

Воспользовавшись неравенством Гельдера с $q = lp'/(p(sp'+l)) = l/(p(s+l)-l)$ и $q' = lp'/(lp'-psp'-pl) = l/(2l-p(s+l))$, имеем:

$$2 \ge \sum_{k=0}^{N-1}\sum_{i_1,\ldots,i_l}(m^k_{i_1,\ldots,i_l})^p h_k^l \ge$$

$$\ge \sum_{k=0}^{N-1} h_k^l\left[\sum_{i_1,\ldots,i_l}(m^k_{i_1,\ldots,i_l})^{lp'/(sp'+l)}\right]^{p(sp'+l)/p'l}\left[\sum_{i_1,\ldots,i_l}1\right]^{(2l-p(l+s))/l} =$$

$$= \sum_{k=0}^{N-1} h_k^l\left[\sum_{i_1,\ldots,i_l}(m^k_{i_1,\ldots,i_l})^{lp'/(sp'+l)}\right]^{p(sp'+l)/(p'l)} n_k^{(2l-p(l+s)/l} \ge$$

$$\geq \left[\sum_{k=0}^{N-1}\sum_{i_1,\dots,i_l}(m^k_{i_1,\dots,i_l})^{p'l/(sp'+l)}\right]^{p(sp'+l)/p'l} \times$$

$$\times \left[\sum_{k=0}^{N-1}(h_k^l n_k^{(2l-p(l+s))l})^{l/(2l-p(s+l))}\right]^{(2l-p(s+l))/l},$$

где n_k- число кубов $\Delta^k_{i_1,\dots,i_l}$, размещенных в Δ_k.

Оценим сумму

$$\left[\sum_{k=0}^{N-1}(h_k^l n_k^{(2l-p(l+s))/l})^{l/(2l-p(l+s))}\right]^{(2l-p(s+l))/l} =$$

$$= \left[\sum_{k=0}^{N-1} h_k^{l^2/(2l-p(l+s))} n_k\right]^{(2l-p(s+l))/l} =$$

$$= \left[\sum_{k=0}^{N-1} n_k h_k^{-l^2/(p(l+s)-2l)}\right]^{(2l-p(s+l))/l} =$$

$$= A\left[\sum_{k=0}^{N-1}\left(\frac{N^v-k^v}{k^{v-1}}\right)^{l-1}\left(\frac{N^v}{k^{v-1}}\right)^{l^2/(p(s+l)-2l)}\right]^{(2l-p(s+l))/l} \geq$$

$$\geq A\left[\sum_{k=0}^{[N/2]}\left(\frac{N^v-k^v}{k^{v-1}}\right)^{l-1}\left(\frac{N^v}{k^{v-1}}\right)^{l^2/(p(s+l)-2l)}\right]^{(2l-p(s+l))/l} \geq$$

$$\geq A\left[\sum_{k=0}^{[N/2]}\frac{N^{v(l^2/(p(s+l)-2)+l-1)}}{k^{(v-1)(l^2/(p(s+l)-2l)+l-1)}}\right]^{(2l-p(s+l))/l} =$$

$$= A\begin{cases} N^{-v(p(s+l)(l-1)/l+2-l)} & \text{при } w>1,\\ N^{-v(p(s+l)(l-1)/l+2-l)}(\ln n)^{-(p(s+l)-2l)/l} & \text{при } w=1,\\ N^{-p(s+l)+l} & \text{при } w<1,\end{cases}$$

где $w=(v-1)(l^2/(p(s+l)-2l)+l-1)$.

Отсюда следует, что число кубов n^*, которое необходимо добавить к первоначальному разбиению области Ω для построения алгоритма, оценивается неравенством

$$n^* = \sum_{k=0}^{N-1}\sum_{i_1,\dots,i_l} n^k_{i_1,\dots,i_l} \leq$$

$$\leq A \begin{cases} N^{v(l-1+l/(p(s+l)-l))} & \text{при } w > 1, \\ N^{v(l-1+l/(p(s+l)-l))}(\ln n)^{1-l/(p(s+l)-l)} & \text{при } w = 1, \\ N^l & \text{при } w < 1. \end{cases}$$

Число же кубов $\Delta^k_{i_1,\ldots,i_l}$ первоначального разбиения оценивается соотношением

$$n^0 \asymp \begin{cases} N^{v(l-1)} & \text{при } v > l/(l-1), \\ N^l & \text{при } v < l/(l-1), \\ N^l \ln N & \text{при } v = l/(l-1), \end{cases}$$

установленном в разделе 2 главы 2.

Оценим погрешность вычисления интеграла при различных значениях w и v.

Пусть $w \leq 1$. Тогда $v < l/(l-1)$. Рассмотрим отдельно два случая: 1)$w < 1, v < l/(l-1)$; 2)$w = 1, v < l/(l-1)$.

В первом случае общее число функционалов, необходимое для реализации адаптивного алгоритма вычисления интеграла с точностью AN^{-s-l} в каждом кубе разбиения, равно $n = n^* + n^0 = AN^l$. Следовательно, погрешность адаптивного алгоритма в рассматриваемом случае равна $R(f) = An^*N^{-s-l} = AN^{-s} = An^{-s/l}$.

Во втором случае общее число функционалов, необходимых для реализации адаптивного алгоритма вычисления интеграла с точностью AN^{-s-l} в каждом кубе разбиения:

$$n = n^* + n^0 = A\left(N^{v(l-1+l/(p(s+l)-l))}(\ln n)^{1-l/(p(s+l)-l)} + N^l\right).$$

Введем обозначение $u = v(l-1+l/(p(s+l)-l))$. Если $u < l$, то погрешность адаптивного алгоритма оценивается величиной $An^{-s/l}$.

Если $u = l$, то она не больше, чем

$$A(\ln n)^{s(1/l-1/(p(s+1)-l)}n^{-s/l}.$$

Если $u > l$, то погрешность адаптивного алгоритма оценивается величиной

$$An^{-\frac{s-\gamma+1-l/(p(s+1)-l)}{l-1+l/(p(s+1)-l)}}(\ln n)^{\frac{(s+l-\gamma)(p(s+l)-2l)}{(l-1)(p(s+l)-l)+l}}.$$

Пусть $w > 1$. Здесь нужно рассмотреть два случая: 1)$v \geq l/(l-1)$; 2)$v < l/(l-1)$.

В первом случае число функционалов, при котором достигается точность AN^{-s-l} в каждом кубе разбиения, равно $AN^{v(l-1+l/(p(s+l)-l))}$ (при $v = l/(l-1)$ предполагается, что N достаточно большое число), и, следовательно, точность построенного алгоритма

$$An^{-(s+l-\gamma+1/(p(s+l)-l))/(l-1+l/(p(s+l)-l))}.$$

Во втором случае число функционалов, при котором достигается точность вычисления интеграла AN^{-s-l} в каждом кубе разбиения, равно $AN^{v(l+1-l/(p(s+l)-l))}$ при $v(l-1+l/(p(s+l)-l)) \geq l$ и AN^l- при $v(l-1+l/(p(s+l)-l)) < l$. Следовательно, погрешность адаптивного алгоритма равна

$$An^{-(s+l-\gamma+l/(p(s+l)-1))/(l-1+l/(p(s+l)-l))}$$

при $v(l-1+l/(p(s+l)-l)) \geq l$ и $AN^{-s/l}-$ при $v(l-1+l/(p(s+$ $+l)-l)) < l$. Собирая вместе полученные оценки, завершаем доказательство теоремы.

Список литературы

1. Аксень М. Б. К вопросу об оценках приближений квадратурными формулами для некоторых классов функций // Тр. 1-й Респ. конф. матем. Белоруссии. – Минск, 1965. – С. 5 – 17.

2. Аксень М. Б. Об одной наилучшей квадратурной формуле с весом x и ее использовании для вычисления двойных интегралов/ М. Б. Аксень, М. И. Левин // Изв. АН БССР. Сер. физ.-мат. наук. – 1972. – N 1. – С.75 – 80.

3. Александров П. С. Введение в теорию размерности. Введение в теорию топологических пространств и общую теорию размерности/ П. С. Александров, Б. А. Пасынков. – М.: Наука, 1973. – 575 с.

4. Арнольд В. И. О функциях трех переменных // Докл. АН СССР. – 1957. – Т. 114. – N 4. – С. 679 – 681.

5. Арро В. К. Наилучшая квадратурная формула с весовой функцией x^{α} // Изв. АН ЭССР. Физика, математика. – 1975. – N 4. – С. 387 – 391.

6. Арро В. К. Наилучшая квадратурная формула с весовой функцией x^{α} на множестве функций W L // Тр. Тал. политехн. ин-та. Галлил: Тал. политехн. ин-т. – 1976. – С. 3 – 9.

7. Ахиезер Н. И. Лекции по теории аппроксимации. – М.: Наука, 1965. – 407 с.

8. Бабенко В. Ф. Асимптотически точная оценка остатка наилучших для некоторых классов функций кубатурных формул // Математические заметки. – 1976. – Т. 19. – N 3. – С. 313 – 322.

9. Бабенко В. Ф. Точная асимптотика остатков оптимальных для некоторых классов весовых кубатурных формул // Математические заметки. – 1976. – Т. 20. – N 4. – С. 589 – 595.

10. Бабенко К. И. Несколько замечаний о приближении функций многих переменных // Математический сборник. – 1971. – Т. 86. – N 4. – С. 179 – 180.

11. Бабенко К. И. О некоторых задачах теории приближений и численного анализа // Успехи математических наук. – 1985. – Т. 40. – Вып. 1. – С. 3 – 28.

12. Бабенко К. И. Основы численного анализа. – М.: Наука, 1986. – 744 с.

13. Бахвалов Н. С. О свойствах оптимальных методов решения задач математической физики // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 1970. – Т. 10. – N 3. –
С. 555 – 568.

14. Бахвалов Н. С. О оптимальности линейных методов приближения операторов на выпуклых классах функций // Журнал

вычислительной математики и математической физики. – 1971. – Т. 11. – N 4. – С. 1014 – 1018.

15. Бахвалов Н. С. Численные методы/ Н. С. Бахвалов, Н. П. Жидков, Г. М. Кобельков. – М.: Лаборатория базовых знаний, 2001. – 632 с.

16. Бирман М. Ш. Кусочно-полиномиальные приближения функций классов W_p^r/ М. Ш. Бирман, М. З. Соломяк. – Математический сборник. – 1967. – Т. 73. – N 3. – С. 331 – 355.

17. Бойков И. В. Оптимальные по точности алгоритмы приближенного вычисления сингулярных интегралов. – Саратов: Изд-во Сарат. гос. ун-та, 1983. – 210 с.

18. Бойков И. В. Асимптотически оптимальные кубатурные формулы на классах дифференцируемых функций // Оптимальные методы вычислений и их применение: Межвуз. сб. науч. тр. – Пенза: Пенз. политехн. ин-т, 1985. – Вып. 7. – С. 3 – 13.

19. Бойков И. В. Оптимальные по точности алгоритмы вычисления интегралов // Оптимальные методы вычислений и их применение: Межвуз. сб. науч. тр. – Пенза: Пенз. политехн. ин-т, 1987. – Вып. 8. – С. 4 – 22.

20. Бойков И. В. Оптимальные кубатурные формулы вычисления многомерных интегралов на классе $Q_{r,\gamma}(\Omega, 1)$ // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 1990. – Т. 29. – N 8. – С. 1123 – 1132.

21. Бойков И. В. Об одном адаптивном алгоритме аппроксимации функций // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 1993. – Т. 32. – N 11. – С. 1638 – 1650.

22. Бойков И. В. Пассивные и адаптивные алгоритмы приближенного вычисления сингулярных интегралов. Пенза: Изд-во Пенз. гос. техн. ун-та, 1995. – Ч. 1. – 214 с.

23. Бойков И. В. Пассивные и адаптивные алгоритмы приближенного вычисления сингулярных интегралов. Пенза: Изд-во Пенз. гос. техн. ун-та, 1995. – Ч. 2.– 128 с.

24. Бойков И. В. Аппроксимация некоторых классов функций локальными сплайнами // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 1998.– Т 38. – N 1. – С. 25 – 33.

25. Бойков И. В. Оптимальные алгоритмы восстановления функций и вычисления интегралов на одном классе бесконечно дифференцируемых функций // Изв. вузов. Математика. – 1998. – N 9. – С. 14 – 20.

26. Бойков И. В. К проблеме Колмогорова о представлении аналитических функций нескольких переменных суперпозициями непрерывно дифференцируемых функций меньшего числа переменных// Вестн. ОГГГГН РАН, N 3(13) 2000 URL:http://www.scgis.ru/russian/cp1251/ h.dgggms/3-2000/ boikov.htm.

Boikov I.V. Solution of Kolmogorov Problem an Representation of Analytical Functions of Many Variables by Superpositions of Continuously Differentiable Functions with Less Number of Variables// Herald of the DGGGMS RAS, N 3(13) 2000 URL:http://www.scgis.ru/russian/cp1251 h.dgggms/3-2000/ boikov.engl. htm.

27. Бойков И. В. К проблеме Колмогорова о невозможности представления аналитических функций многих переменных суперпозициями непрерывно дифференцируемых функций меньшего числа переменных// Изв. высш. учеб. заведений. Поволж. регион. Естественные науки. – Пенза: Инф.-изд. центр ПГУ, 2002.– N 1. – С. 5 – 14.

28. Бойков И. В. О сложности восстановления функций из классов $Q_{r\gamma}(\Omega, M)$ и $B_{r\gamma}(\Omega)$ на дискретных автоматах//Вычислительные технологии. – 2004. – Т. 9. – С. 31 – 43.

29. Бойков И. В. Приближенное решение сингулярных интегральных уравнений. – Пенза: Изд-во Пенз. гос. ун-та, 2004. – 316 с.

30. Бойков И. В. Приближенные методы вычисления сингулярных и гиперсингулярных интегралов. Ч. 1. Сингулярные интегралы. – Пенза: Изд-во Пенз. гос. ун-та, 2005. – 360 с.

31. Витушкин А. Г. К тринадцатой проблеме Гильберта // Докл. АН СССР. – 1955. – Т. 95. – N 4. – С. 701 – 704.

32. Витушкин А. Г. Оценка сложности задачи табулирования.– М.: ГИФМЛ, 1959. – 228 с.

33. Витушкин А. Г. Линейные суперпозиции функций / А. Г. Витушкин, Г. М. Хенкин. // Успехи математических наук. – 1967. – Т. 22. – N 1. – С. 77 – 124.

34. Гайер Д. Лекции по теории аппроксимации в комплексной области. – М.: Мир, 1986. – 216 с.

35. Глускин Е. Д. Об одной задаче о поперечниках // Докл. АН СССР. – 1974. – Т. 219. – N 13. – С. 527 – 530.

36. Гончаров Л. В. Теория интерполирования и приближения функций. – М.: ГИТТЛ. – 1954. – 327 с.

37. Гохберг И. Ц. Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов в гильбертовом пространстве/ И. Ц. Гохберг, М. Г. Крейн. – М.: Наука, 1965. – 448 с.

38. Дзядык В. К. Введение в теорию равномерного приближения функций полиномами. – М.: Наука, 1977. – 511 с.

39. Женсыкбаев А. А. Наилучшая квадратурная формула для некоторых классов периодических дифференцируемых функций // Изв. АН СССР. – 1977. – Т. 41. – N 5. – С. 1110 – 1124.

40. Женсыкбаев А. А. Моносплайны минимальной нормы и наилучшие квадратурные формулы // Успехи математических наук.

– 1981. – Т. 36. – N 4. – С. 107 – 159.
41. Исмагилов Р. С. Поперечники компактов в линейных нормированных пространствах // Геометрия линейных пространств и теория операторов. – Ярославль: Яросл. гос. ун-т, 1977. – С. 75 – 113.
42. Исмагилов Р. С. Поперечники множеств в линейных нормированных пространствах и приближение функций тригонометрическими полиномами // Успехи математических наук. – 1974. – Т. 79. – N 1. – С. 161 – 178.
43. Кашин Б. С. Поперечники некоторых конечномерных множеств и классов гладких функций // Изв. АН СССР. Сер. математическая. – 1977. – Т. 41. – N 1. – С. 334 – 351.
44. Колмогоров А. Н. О представлении непрерывных функций нескольких переменных суперпозициями функций меньшего числа переменных // Докл. АН СССР. – 1956. – Т. 108. – С. 179 – 182.
45. Колмогоров А. Н. О представлении непрерывных функций нескольких переменных в виде суперпозиций непрерывных функций одного переменного и сложения // Докл. АН СССР. – 1957. – Т. 114. – С. 953 – 956.
46. Колмогоров А. Н. Избранные труды. Математика и механика. – М.: Наука, 1985. – 470 с.
47. Колмогоров А. Н. ϵ-энтропия и ϵ-емкость множеств в функциональных пространствах / А. Н. Колмогоров, В. М. Тихомиров. // Успехи математических наук. – 1959. – Т. 14. – Вып. 2. – С. 3 – 86.
48. Корнейчук Н. П. О новых результатах по экстремальным задачам теории квадратур. Добавление к кн.: Никольский С.М. Квадратурные формулы. – М.: Наука, 1974. – С. 136 – 223.
49. Корнейчук Н. П. Наилучшие кубатурные формулы для некоторых классов функций многих переменных // Математические заметки. – 1968. – Т. 3. – N 5. – С. 565 – 576.
50. Корнейчук Н. П. Экстремальные задачи теории приближения. – М.: Наука, 1976. – 320 с.
51. Корнейчук Н. П. Сплайны в теории приближения. – М.: Наука, 1984. – 352 с.
52. Коробов Н. М. Теоретико-числовые методы в приближенном анализе. – М.: Физматгиз, 1964. – 222 с.
53. Лебедь Г. К. О квадратурных формулах с наименьшей оценкой остатка на некоторых классах функций // Математические заметки. – 1968. – Т. 5. – N 3. – С. 577 – 586.
54. Лебедь Г. К. О квадратурных формулах с наименьшей оценкой остатка на некоторых классах функций // Изв. АН СССР. Сер. математическая. – 1970. – Т. 34. – N 3. – С. 639 – 661.
55. Левин М. И. Наилучшие формулы интегрирования с весовой

функцией x и фиксированными узлами // Изв. АН ЭССР. Физика, математика. – 1971. – Т. 20. – N 3. – С. 279 – 284.

56. Левин М. И. О наилучших квадратурных формулах с весовой функцией и фиксированными узлами // Изв. АН ЭССР. Физика, математика. – 1974. – Т. 23. – N 2. – С. 179 – 181.

57. Левин М. И. Экстремальные задачи для кубатурных формул/ М. И. Левин, Ю. М. Гиршович. // Докл. АН СССР. – 1977. –
Т. 236. – N 6. – С. 1303 – 1306.

58. Майоров В. Е. Дискретизация задачи о поперечниках // Успехи математических наук. – 1975. – Т. 30. – N 6. – С. 179 – 180.

59. Маковоз Ю. И. Об одном приеме оценки снизу поперечников множеств в банаховом пространстве // Математический сборник. – 1972. – Т. 87. – N 1. – С. 136 – 142.

60. Математическая энциклопедия. – М.: Изд-во «Советская энциклопедия», 1984. – Т. 4. – 1211 с.

61. Моторный В. П. О наилучшей квадратурной формуле вида $\sum_{k=1}^{n} p_k f(x_k)$ для некоторых классов периодических дифференцируемых функций // Изв. АН СССР. Сер. математическая. – 1974. –
N 3. – С. 583 – 614.

62. Натансон И. П. Конструктивная теория функций. – М.; Л.: ГИФМЛ, 1949. – 688 с.

63. Никольский С. М. Квадратурные формулы // Изв. АН СССР. Сер. математическая. – 1952. – Т. 16. – С. 181 – 196.

64. Никольский С. М. Квадратурные формулы. – М.: Наука, 1979. – 254 с.

65. Никольский С. М. Курс математического анализа. – М.: Наука, 1975.– Т. 1. – 432 с.

66. Никольский С. М. Приближение функций многих переменных и теоремы вложения. – М.: Наука, 1977. – 456 с.

67. Половинкин В. И. Некоторые вопросы теории весовых кубатурных формул // Сибирский математический журнал. – 1971. – N 1. – С. 177 – 196.

68. Половинкин В. И. Последовательности квадратурных формул с пограничным слоем // Тр. семинара С. Л. Соболева. – Новосибирск: Ин-т мат. АН СССР, 1977. – N 1. – С. 149 – 158.

69. Половинкин В. И. Асимптотически наилучшие последовательности кубатурных формул // Сибирский математический журнал. – 1975.– Т. 16. – N 6. – С. 1255 – 1262.

70. Половинкин В. И. Асимптотически наилучшие весовые квадратурные формулы: Ст. деп. в ВИНИТИ. Рег. N 7928. – 1984. – 24 с.

71. Половинкин В. И. Некоторые задачи, связанные с порядками сходимости весовых кубатурных формул / В. И. Половинкин, М. П. Свитачева. // Оптимальные методы вычислений и их применение к обработке информации: Межвуз. сб. науч. тр. – Пенза: Пенз. политех. ин-т, 1990. – Вып. 9. – С. 49 – 53.
72. Проблемы Гильберта/ Под ред. П. С. Александрова. М.: – Наука, 1969. – 240 с.
73. Рисс Ф. Лекции по функциональному анализу / Ф. Рисс, Б. Секефальви-Надь. – М.: Мир, 1979. – 587 с.
74. Смоляк С. А. Об оптимальном восстановлении функций и функционалов от них //Дис. ... канд. физ.-мат. наук. – М.: МГУ, 1965. –
140 с.
75. Соболев С. Л. Введение в теорию кубатурных формул. – М.: Наука, 1974. – 808 с.
76. Соболь И. М. Многомерные квадратурные формулы и функции Хаара. – М.: Наука, 1969. – 228 с.
77. Соколов Н. П. Введение в теорию многомерных матриц. – Киев: Наукова думка, 1972. – 360 с.
78. Стечкин С. Б. О наилучших приближениях заданных классов функций любыми полиномами // Успехи математических наук. – 1954. – Т. 9. – N 1. – С. 133 – 134.
79. Сухарев А. Г. Минимаксные алгоритмы в задачах численного анализа. – М.: Наука, 1989. – 304 с.
80. Темляков В. Н. Приближение функций с ограниченной смешанной разностью тригонометрическими полиномами и поперечники некоторых классов функций // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1982. – Т. 46. – N 1. – С. 171 – 186.
81. Темляков В. Н. Приближение функций с ограниченной смешанной производной. – М.: Наука, 1986. – 111 с.
82. Теоретические основы и конструирование численных алгоритмов задач математической физики // Под ред. К. И. Бабенко. – М.: Наука, 1979. – 196 с.
83. Тиман А. Ф. Теория приближений функций действительного переменного.– М.: Физматгиз, 1960. – 624 с.
84. Тихомиров В. М. Поперечники множеств в функциональных пространствах и теория приближений// Успехи математических наук. – 1960. – Т. 15. – N 13. – С. 81 – 120.
85. Тихомиров В. М. Работы А. Н.Колмогорова по ϵ-энтропии функциональных классов и суперпозициям функций // Успехи математических наук. – 1963. – Т. 18. – N 5. – С. 55 – 92.
86. Тихомиров В. М. Поперечники и энтропия// Успехи математических наук. – 1983. – Т. 38. – N 4. – С. 91 – 99.
87. Тихомиров В. М. Теория приближений // Итоги науки и

техники. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. – М.: Наука, 1987. – Т. 14. – С. 103 – 269.

88. Тихомиров В. М. А. Н. Колмогоров и теория приближений // Успехи математических наук. – 1989. – Т. 44. – N 1. – С. 83 – 122.

89. Трауб Дж. Общая теория оптимальных алгоритмов/ Дж. Трауб, Х. Вожьняковский. – М.: Мир, 1983. – 382 с.

90. Урысон П. С. Memoire sur les multiplicites // Fund. Math. – 1925. – V. 7, 1926. – V. 8.

91. Фридман Б. Л. Нигде не плотность пространства линейных суперпозиций нескольких переменных // Изв. АН СССР. Сер. математическая. – 1972. – Т. 36. – N 4. – С. 814 – 846.

92. Чебышев П. Л. Теория механизмов, известных под названием параллелограммов// Сочинения. – М., 1853. – Т. 1. – с. 111 – 143.

93. Шеннон К. Статистическая теория передачи электрических сигналов// Теория передачи электрических сигналов при наличии помех: Сб. ст. – М.: Изд-во иностр. лит., 1953. – С. 181 – 215.

94. Bernstein S.N. Sur l'ordre de la meilleure approximation des functions continues par des polynomes de degre donne // Mem. Acad. de Belgigue (2) 4 (1912). P. 1 – 103.

95. Girshovich J. Extremal properties of Euler – Maclaurin and Gre-
gory quadrature formulas // Изв. АН ЭССР. Физика, математика. – 1978. – Т. 27. – N 3. – С. 259 – 265.

96. Jachson D. On approximation by trigonometric sums and polynomials // Trans. Amer. Math. Soc. 14 (1912). – P. 491 – 515.

97. Kolmogoroff A. Uber die beste Annaherung von Funktionen einer gegebenen Funktionen klasse // Ann. Math. – V. 37. – 1936. – P. 107 – 117.

98. Lorentz G.G. The 13-th problem of Hilbert // Proceedings of symposic in pure mathematics. V. 28. – 1976. American Mathematical Society. Providence, Rhode Island. – 1976. – P. 419 – 430.

99. Lorentz G.G. Approximation of functions // Chelsia Publication Company. New York. – 1986. – 190 p.

100. Ostrowski A. Uber Dirichletsche Reihen und algebreische Differentialgleic hungen // Math. Z. – 1920. – V. 8. – N 3 – 4. – P. 241 – 298.

101. Shannon C. A mathematical theory of communication// Bell System Techn. J. – 1948. – V. 27. – N 3. – P. 379 – 423; 1948. V. 27. – N 4. – P. 623 – 656. Русский перевод: Шеннон К. Математическая теория связи// Работы по теории информации и кибернетике. – М.: Изд-во иностр. лит., 1963. – С. 243 – 332.

102. Sprecher D. Ph. D. Dissertation, University of Maryland, 1963.